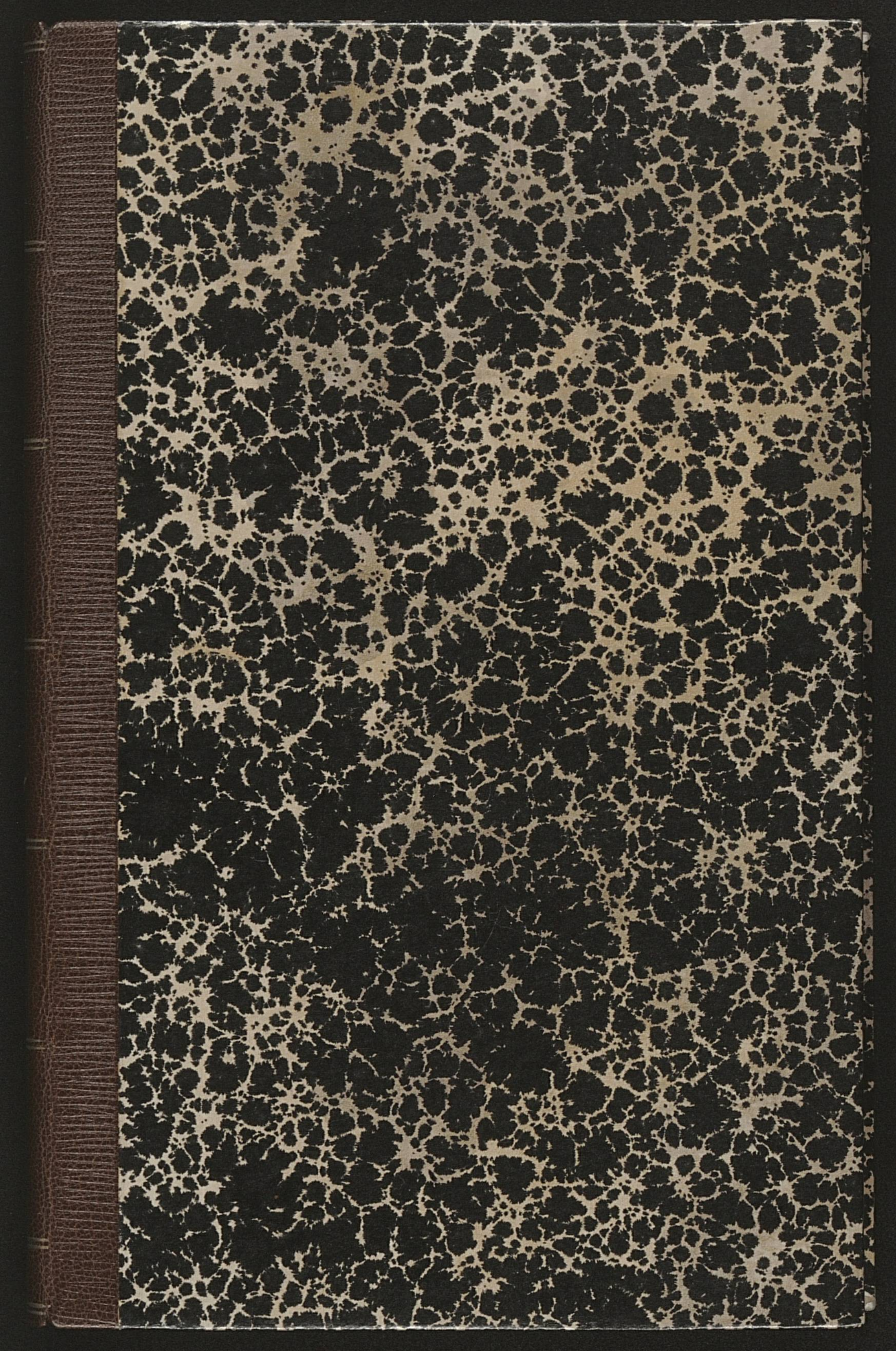
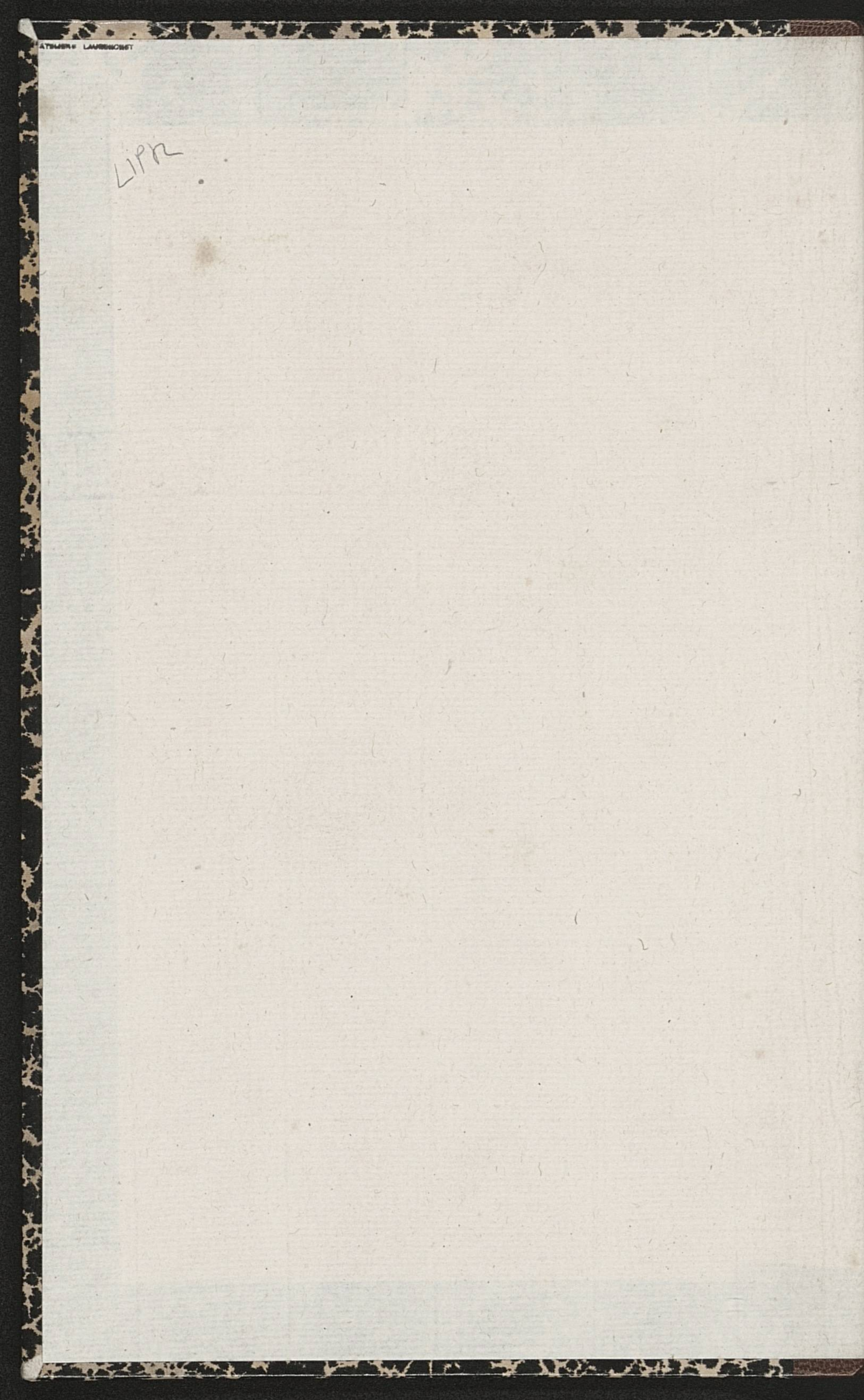



LIPR

ÉLÉMENS

RAISONNÉS D'ALGÈBRE.

ÉLEMENS

RAISONNÉS D'ALGÈBRE,

Publiés à l'usage des Étudians en Philosophie ;

Par Simon LHUILIER,

Professeur de Mathématiques à Genève, Membre de la Société pour l'Encouragement des Arts; l'un des Membres du Jury d'Instruction du Léman; Professeur honoraire de Mathématiques sublimes à l'Université de Leyde; Membre de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Prusse, des Sociétés Royales de Londres et de Goëttingue; Correspondant de l'Académie de Saint-Pétersbourg; Membre de l'Athénée de Lyon, du Lycée du Département du Gard; et de la Société d'Education en Pologne.

TOME SECOND.

A GENÈVE,

Chez J. J. Paschoud, Libraire.

An XII. — 1804.

ERRATA.

Pag.	*lig.*	*au lieu de*	*lisés.*
1er. vol. Avt.-propos p. Ire. Note		Octobre	Novembre.
		74	174
46	16	$=x$	$=xx$
48	8	8	48
185	17	—2	—5
213	19 et 20	aa $\underline{2y-a}$	$\frac{aa}{2y-a}$
274	13	xy	$xy=p$
291	2 et 3	$)+($	$)-($
333	3	$2(al$	$2l(a$
340	8	$(s-)x^2$	$(s+x)^2$
344	11	$(a+b)$	$(a+b)x$
384	22	$a+b-zz$	$(a+b-zz)^2$
386	2	différence de	différence des carrés de
390	5	$m+xxyy$	$xx+myy$
391	dernière		yy.
		2d. Vol.	
70	12	160	162
120	17	de cette diffe.	de cette somme et de cette diffe.
190	dernière	$b-c$	$(b-c)^2$
191	3	extrêmes	quatre termes

ÉLÉMENS

RAISONNÉS D'ALGÈBRE.

CHAPITRE IX.

Des Proportions et des Progressions arithmétiques.

§124. On dit qu'on s'occupe du *Rapport arithmétique* de deux quantités, quand on cherche de combien l'une est plus grande que l'autre, ou quand on cherche quelle est leur différence.

La comparaison de ces deux quantités, sous ce point de vue, ou leur rapport arithmétique, répond donc à la soustraction. Le minuende est appelé l'*antécédent* du rapport; le soustrahende est appelé le *conséquent* du rapport; et la différence ou le reste est l'*exposant* du rapport.

Deux *rapports arithmétiques* sont dits *égaux* lorsqu'ils ont le même exposant.

L'égalité de deux rapports arithmétiques est appelée *proportion arithmétique* ou par équi-différence.

Soient a, b, c, d, quatre quantités en proportion arithmétique; on l'indique comme il suit : $\begin{matrix} a-b=c-d \\ b-a=d-c \end{matrix}$ suivant que $a \gtrless b$, et partant $c \gtrless d$.

Soient a et b les deux antécédens d'une proportion arithmétique ; et soit d la différence de chacun de ces antécédens à son conséquent ; les deux conséquens seront $a \pm d$, $b \pm d$, suivant que chaque antécédent est plus petit ou plus grand que son conséquent.

§ 125. *Théorème.* Dans toute proportion arithmétique la somme des extrêmes est égale à la somme des moyens.

Soit $a-b=c-d$; j'affirme que $a+d=b+c$.

Démonstration. Aux deux membres de l'équation . . . . $a-b=c-d$,
soit ajoutée la même quantité $b+d$;
on obtient. . . . . $a+d=b+c$.

Autr. Les deux antécédens étant a et b, que les deux conséquens soient $a \pm d$, $b \pm d$; la somme des extrêmes est $a+b \pm d$, et celle des moyens est $b+a \pm d$.

Récip. Si la somme de deux quantités est égale à la somme de deux autres, on peut

établir entre ces quatre quantités une proportion, en prenant les termes d'une des sommes pour les extrêmes, et les termes de l'autre somme pour les moyens d'une proportion.

Symboliquement. Si $a+d=b+c$,
$a-b=c-d$.

Dém. A chaque membre de l'équation $a+d=b+c$, soit ôtée la même quantité $b+d$; on obtient $a-b=c-d$.

§ 126. Soit une proportion arithmétique, dont les deux termes moyens sont égaux; cette *proportion* est appelée *continue.*

Dans une proportion arithmétique continue, le terme moyen est la moitié de la somme des extrêmes, et il est appelé *moyen arithmétique* entre les deux extrêmes.

Le terme moyen étant s, et sa différence à chacun des extrêmes étant d, la proportion est $s+d$, s, $s-d$.

Dans une proportion arithmétique continue, le carré du terme moyen est plus grand que le produit des extrêmes.

En effet, $(s+d)(s-d)=ss-dd$.

Partant, la moyenne arithmétique entre deux quantités, est plus grande que la moyenne géométrique entre ces deux quantités.

En général, soit $2s$ la somme des extrêmes ou des moyens d'une proportion arithmétique; soit $2d$ la différence des deux extrêmes, et $2d'$ la différence des deux moyens, de manière que la proportion soit $s+d$, $s+d'$, $s-d'$, $s-d$, le produit des extrêmes est $ss-dd$; celui des moyens est $ss-d'd'$; et partant, ces deux produits sont inégaux, en supposant d et d' inégaux. Ainsi, quatre quantités en proportion arithmétique ne peuvent pas être en même tems en proportion géométrique; et réciproquement.

Nous avons vu § 47 que si quatre quantités forment une proportion géométrique, leurs carrés forment aussi une proportion géométrique, et qu'il en est de même des puissances d'un ordre quelconque. Il n'en est pas de même des proportions arithmétiques. Ainsi, les termes d'une proportion arithmétique étant $s+d$, $s+d'$, $s-d'$, $s-d$, la somme des carrés des extrêmes est $2(ss+dd)$, et la somme des carrés des moyens est $2(ss+d'd')$; or, ces deux sommes sont inégales, en supposant d et d' inégales.

§ 127. *Prob.* Quatre nombres a, b, c, d, étant donnés, trouver le nombre qu'il faut

ajouter à chacun d'eux pour que leurs carrés forment une proportion arithméthique.

Soient, a, b, c, d, les quatre nombres donnés. Soit x le nombre cherché; on doit avoir, $(a+x)^2-(b+x)^2=(c+x)^2-(d+x)^2$.

De là, $x=\dfrac{-aa+bb+cc-dd}{2(a-b-c+d)}$.

$$a+x=\frac{(a-b)^2+(a-c)^2-(a-d)^2}{2(a-b-c+d)};\ b+x=\frac{(b-a)^2+(b-d)^2-(b-c)^2}{2(a-b-c+d)};$$

$$c+x=\frac{(c-a)^2+(c-d)^2-(b-c)^2}{2(a-b-c+d)};\ d+x=\frac{(d-b)\ +(d-c)\ -(d-a)^2}{2(a-b-c+d)}.$$

Rem. Pour que le problème soit possible dans le sens propre de l'énoncé, qui demande une addition à faire aux nombres donnés, il faut que, en supposant $a+d \gtrless b+c$, on ait $bb+cc \gtrless aa+dd$.

Soit $a+d=2s$, soit $a-d=2z$,

$b+c=2s'$, $b-c=2z'$;

$aa+dd=2(ss+zz)$ $bb+cc=2(s's'+z'z')$.

Partant, en supposant $s>s'$, ou $ss>s's'$, on doit avoir $ss<s's'+(z'z'-zz)$.

Aut. exerc. Trouver le nombre qu'on doit ajouter à quatre nombres donnés, pour que les cubes des sommes soient en proportion arithmétique.

§ 128. *Prob.* Trouver quatre nombres en proportion arithmétique, en connoissant la différence des extrêmes $2d$, la différence des moyens $2d'$, et la somme des carrés des quatre termes, $4q$.

Dén. Somme des extrêmes ou des moyens $2s$.
Termes extrêmes, $s+d$, $s-d$.
Termes moyens, $s+d'$, $s-d'$.

Somme des carrés des extrêmes, $2(ss+dd)$.
Somme des carrés des moyens, $2(ss+d'd')$.
Somme des quatre carrés, $4ss+2(dd+d'd')$.

Cond. $4ss+2(dd+d'd')=4q$.

Réd. $ss=q-\frac{dd+d'd'}{2}$.

Sol. $s=\sqrt{(q-\frac{dd+d'd'}{2})}$.

Aut. ex. On donne le produit p des moyens, le produit p' des extrêmes, et la somme $4c$ des carrés des quatre termes.

Prob. indéterminés. Les différences $2d$ et $2d'$ étant données, on donne l'excès de la somme des carrés des extrêmes sur la somme des carrés des moyens.

Trouver quatre nombres en proportion arithmétique, en connoissant leur somme, la

somme de leurs carrés et la somme de leurs cubes.

Trouver quatre nombres en proportion arithmétique, en connoissant leur somme, l'excès de la somme des carrés des extrêmes sur la somme des carrés des moyens, et l'excès de la somme des cubes des extrêmes sur la somme des cubes des moyens.

Trouver quatre nombres en proportion arithmétique, en connoissant le produit des moyens, le produit des extrêmes, et l'excès de la somme des carrés des extrêmes sur la somme des carrés des moyens.

Le problème suivant est déterminé, et réductible au premier degré : on donne le produit des moyens, le produit des extrêmes, et l'excès de la somme des cubes des extrêmes sur la somme des cubes des moyens.

§ 129. Soit une suite de quantités, telle, que la différence de deux qui se suivent est toujours la même ; cette suite est appelée une *Progression arithmétique*, ou par équi-différence.

Ainsi, les nombres naturels, 1, 2, 3, 4, 5, 6, forment une progression arithmétique, dans laquelle la différence constante de deux termes qui se suivent est l'unité. Les nombres im-

pairs 1, 3, 5, 7, ... forment une progression arithmétique, dans laquelle la différence constante de deux termes qui se suivent est deux.

En général, soit a le premier terme d'une suite arithmétique, d la différence constante de deux termes qui se suivent; cette progression est, a, $a+d$, $a+2d$, $a+3d$, $a+4d$. . . . Un terme quelconque est exprimé dans le premier terme, dans la différence constante, et dans le nombre n qui indique la place qu'il occupe de la manière suivante. Au premier terme soit ajoutée la différence commune, prise une fois de moins qu'il n'y a de termes : le n^{me} terme de la progression est donc $a+d(n-1)$; cette expression est appelée le *terme général*.

Ex. Soit $a=1$, $d=1$; le n^{me} nombre naturel est $1+1\times(n-1)=n$. Soit $a=1$, $d=2$; le n^{me} nombre impair est $1+2(n-1)=2n-1$.

Au lieu d'exprimer les termes d'une progression arithmétique, dans le premier terme, dans la différence constante, et dans le nombre des termes à compter depuis le premier, il convient quelquefois de décomposer la progression en deux autres, à partir du terme du milieu, si le nombre des termes est impair;

et à partir des deux termes du milieu, si le nombre des termes est pair, et d'exprimer chaque terme dans le terme ou dans les termes moyens, dans la différence commune, et dans leurs distances aux termes moyens.

1er. *Cas.* Que le nombre des termes soit impair, $2n+1$; soit a le terme du milieu; soit d la différence constante de deux termes voisins, la progression pourra être présentée comme il suit :

$$\begin{matrix} a+nd, & a+(n-1)d & . \; . & a+2d, & a+d, & \\ & & & & & a. \\ a-nd, & a-(n-1)d & . \; . & a-2d, & a-d, & \end{matrix}$$

2d. *Cas.* Que le nombre des termes soit pair $2n$; soit $2d$ la différence commune de deux termes voisins; la progression pourra être présentée comme il suit :

$$\begin{matrix} a+(2n-1)d, & a+(2n-3)d \; . \; . & a+3d, & a+d. \\ a-(2n-1)d, & a-(2n-3)d \; . \; . & a-3d, & a-d. \end{matrix}$$

§ 130. *Théor.* Dans une progression arithmétique, la somme des extrêmes et la somme de deux termes également éloignés des extrêmes, sont égales entr'elles.

Dém. Ce théorème découle immédiatement de la seconde manière de présenter les progressions arithmétiques, puisque deux termes

également éloignés des extrêmes, sont l'un la somme et l'autre la différence de a, et de la différence constante prise un même nombre de fois.

§ 131. De là, découle la manière de trouver la somme des termes d'une progression arithmétique.

En effet, le nombre des termes étant pair $2n$, le nombre des paires égales est n; la valeur de chaque paire est $2a$, et la somme de la progression est $2a \times n = a \times 2n$.

Le nombre des termes étant impair $2n+1$, le nombre des paires égales est n; la valeur de chaque paire est $2a$; la somme de ces paiest $2a \times n = a \times 2n$; ajoutant à cette somme le terme moyen, on obtient $a \times (2n+1)$ pour la somme de la progression.

Partant, la somme de la progression est toujours la demi-somme a des extrêmes, multipliée par le nombre des termes.

On peut aussi exprimer cette somme dans le premier terme a, dans la différence constante d et dans le nombre des termes n. En effet, le dernier terme est $a+d(n-1)$. La demi-somme des extrêmes est $a+d \times \frac{n-1}{2}$. Le produit de cette demi-somme par le nom-

bre des termes est $na+d\times\frac{n(n-1)}{2}$. Cette expression est appelée le *terme sommatoire*.

On peut vérifier cette expression en prouvant que, si elle est vraie pour un certain nombre de termes ou pour une certaine valeur de n, elle est aussi vraie pour la suivante ou pour $n+1$ termes ; en effet, à $na+d\times\frac{n(n-1)}{2}$, soit ajouté $a+nd$, terme suivant, on obtient :

$$(n+1)a+nd(1+\frac{n-1}{2})=(n+1)a+d\times\frac{n(n+1)}{2}.$$

Cette expression est la même que la précédente, en substituant $n+1$ à n.

Ex. 1[er]. Soit $a=1$, $d=1$; la suite à sommer est celle des nombres naturels ; on obtient : $1\times n+1\times\frac{n(n-1)}{1.2}=\frac{n(n+1)}{1.2}$.

Les sommes des nombres naturels sont appelées *nombres triangulaires* ; lesquels sont : 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, . . . $\frac{n(n+1)}{1.2}$ (1).

---

(1) On dit que des points sont rangés triangulairement, lorsque trois points voisins, dont deux appartiennent à une rangée, et l'autre à une rangée voisine, occupent les sommets d'un triangle équilatéral. La fi-

Ex. 2[d]. Soit $a=1$, $d=2$; les nombres à sommer forment la suite des nombres impairs; 1, 3, 5, 7, 9, ... $2n-1$. Leur somme est

$$n+2\times\frac{n(n-1)}{2}=n+n(n-1)=nn,$$ ou le

nombre carré correspondant.

Les sommes des nombres en progression arithmétique, dont le premier terme est 1, et dont la différence de deux termes successifs est un nombre entier, sont appelées *nombres polygones*. Les différences étant 3, 4, 5, 6, 7, ... m, les nombres polygones correspondans sont les pentagones, hexagones, heptagones, octogones, ennéagones,

---

gure formée par cet assemblage étant triangulaire, le nombre des points placés, est exprimé dans le nombre des points rangés sur le côté du triangle, par le nombre triangulaire correspondant. Dans cet arrangement, chaque point (pris dans l'intérieur) est également éloigné de six autres, qui occupent les sommets d'un hexagone régulier, dont le premier occupe le centre.

Dans l'arrangement triangulaire, les rangées sont plus voisines que dans l'arrangement carré, dans le rapport de la hauteur d'un triangle équilatéral à son côté, ou de $\sqrt{3}$ à 2; ce rapport est à peu près celui de 7 à 8 et plus approchamment de 13 à 15.

Cette observation est le fondement d'une application à l'économie rurale, proposée par Mr. LE SAGE,

. . . . . $m+2$ gones. Mais les arrangemens répondans aux nombres triangulaires et aux nombres carrés, sont les plus réguliers et les seuls en usage.

Rem. 1re. Les expressions de deux nombres triangulaires successifs étant $\frac{(n-1)n}{1.2}$ et $\frac{n(n+1)}{2}$, leur somme est nn; savoir, le nombre carré correspondant au plus grand d'entr'eux.

Rem. 2de. Le rapport d'un nombre triangulaire au nombre carré correspondant, est celui de $n+1$ à $2n$, ou de $1+\frac{1}{n}$ à 2; et partant, chaque nombre triangulaire approche d'autant plus d'être la moitié du nombre carré correspondant, que ce nombre est plus grand.

	Valeurs de n		Rapports.
Ex.	9	. . . . .	$5 : 9 = 5 : 10-1$
	99	. . . . .	$50 : 99 = 50 : 100-1$
	999	. . .	$500 : 999 = 500 : 1000-1$
	9999	. . .	$5000 : 9999 = 5000 : 10000-1.$

Aut. exemp. Une personne gagne, la première année, la somme a : chaque année elle augmente son bien de la somme b de plus que l'année précédente : quel sera le produit de ses gains au bout de n années ?

Une personne économise, chaque année, une somme connue a; elle la place en intérêt à un taux connu $r\frac{0}{0}$ (cependant, sans que les intérêts portent eux-mêmes intérêt ou à intérêt simple). Quel sera le produit de ses gains au bout d'un nombre proposé n d'années?

§ 132. Soit s la somme d'une progression arithmétique, dont le premier terme est a, la différence d, et le nombre des termes n.

Dans l'équation $s = na + d \times \frac{n(n-1)}{1.2}$, trois quelconques des quatre quantités a, d, n, s, étant données, on détermine la quatrième. Chacune des quantités a, d, s, est déterminée dans les trois autres par une équation du premier degré : mais n ou le nombre des termes est déterminé dans les trois autres par une équation du second degré. On trouve :

$$n = \frac{\sqrt{((2a-d)^2 + 8ds)} - (2a-d)}{2d}.$$

Ex. 1er. Combien faut-il de nombres naturels pour faire la somme s?

Ici, $a=1$, $d=1$; on a $n = \frac{\sqrt{(8s+1)}-1}{2}$;

$$n+1 = \frac{\sqrt{(8s+1)}+1}{2}; \quad \frac{n(n+1)}{2} = \frac{8s}{8} = s.$$

Rem. Pour que la valeur de n réponde à la question dans le sens propre de l'énoncé, suivant lequel n doit être un nombre rationnel et entier, on doit avoir $8s+1$ égal à un carré. Savoir, si on multiplie par 8 un nombre triangulaire, et si on augmente le produit d'une unité, la somme est un carré.

En effet, $8\times\frac{n(n+1)}{1.2}+1=4nn+4n+1=(2n+1)^2$.

Ex. 2^{d}. Une personne économise, la première année, une somme connue a; chaque année elle augmente son bien d'une somme connue b, de plus que l'année précédente. On demande au bout de combien d'années la somme de ses économies sera une somme connue s.

Ex. 3me. Une personne économise, chaque année, une somme connue a; elle la place en intérêt à un taux connu $r\frac{0}{0}$; de manière que l'intérêt ne rapporte pas intérêt, ou à intérêt simple. On demande au bout de combien d'années ses économies monteront à une somme connue s.

§ 133. *Prob.* Soit donné le premier terme a d'une progression arithmétique, et la différence d de deux termes successifs. Combien doit-on prendre de ses termes, pour que leur

somme soit égale au produit d'un nombre donné b par le nombre de ses termes?

Cond. $s = na + \frac{n(n-1)}{1.2} d = nb.$

Réd. $a + \frac{n-1}{2} d = b$; $(n-1)d = 2(b-a)$;

$n-1 = 2 \times \frac{b-a}{d}.$

Rem. On peut rendre raison, comme il suit, de la formule obtenue. La somme de la progression est le produit de la somme des extrêmes par le nombre des paires; mais elle doit être aussi égale au produit de b par le nombre des termes, ou au produit de $2b$ par le nombre des paires. Donc, la somme des extrêmes est $2b$; mais le premier terme est a; donc, le dernier terme est $2b-a$; mais le dernier terme est $a+d(n-1)$; donc, $d(n-1) = 2(b-a)$, ainsi qu'on l'a trouvé.

Ex. Deux personnes viennent l'une au devant de l'autre. L'une d'elles fait chaque jour dix lieues. L'autre fait cinq lieues le premier jour, et elle augmente chaque jour sa marche d'une lieue. Au moment de leur rencontre elles ont fait le même chemin. On demande le nombre des jours de marche et le chemin fait par chacune d'elles.

Une

Une personne gagne, la première année, 900 frs.; chaque année elle augmente son bien de 600 frs. de plus que l'année précédente.

Au bout de combien d'années cette personne sera-t-elle deux fois aussi riche qu'une personne qui économise, chaque année, 1800 francs?

§ 134. *Prob.* Soit connu le premier terme a d'une progression arithmétique, et la différence constante d de deux termes successifs.

Déterminer le nombre n de ses termes, de manière que la somme de cette progression, augmentée du produit du nombre de ses termes par un nombre donné b, fasse une somme donnée s.

Cond. $na+d\times\frac{n(n-1)}{1.2}+nb=s.$

De là, $n=\frac{\sqrt{(8sd+(2a+2b-d)^2)}-(2a+2b-d)}{2d}$

$$n-1=\frac{\sqrt{(8sd+(2a+2b-d)^2)}-(2a+2b+d)}{2d}.$$

Exemples. Deux personnes séparées par un intervalle de 164 lieues, viennent l'une au devant de l'autre. L'une d'elles fait 10 lieues par jour, et l'autre fait 7 lieues le premier jour, en augmentant chaque jour d'une lieue

sa marche journalière. On demande le point de leur rencontre.

Une personne jouit d'une rente de 360 frs.; au lieu de la dépenser, elle la place en intérêt au 5$\frac{0}{0}$, au moment où elle la perçoit, et laisse ainsi accumuler les intérêts (cependant sans qu'ils portent eux-mêmes intérêt). D'un autre côté, elle possède un capital de 1000 frs., qu'elle fait valoir au 6$\frac{0}{0}$, et dont elle économise les intérêts (sans leur faire porter intérêt). On demande au bout de combien d'années cette personne possédera en tout 9880 frs.

Rem. 1re. Au lieu de connoître la somme de la somme de la progression et du produit du nombre de ses termes par le nombre donné b, qu'on connoisse l'excès de cette somme sur ce produit.

Dans la formule précédente soit changé le signe de b, on aura :

$$n=\frac{\sqrt{(8sd+(2a-2b-d)^2)}-(2a-2b-d)}{2d}$$

$$n-1=\frac{\sqrt{(8sd+(2a-2b-d)^2)}-(2a-2b+d)}{2d}.$$

Rem. 2de. Que l'excès donné soit celui du produit sur la somme de la progression. Dans les formules de la Remarque précédente soit changé le signe de s, on aura :

$$n = \frac{2b + d - 2a \pm \sqrt{((2b + d - 2a)^2 - 8sd)}}{2d}.$$

$$n - 1 = \frac{2b - d - 2a \pm \sqrt{((2b + d - 2a)^2 - 8sd)}}{2d}.$$

Partant, pour que le problème soit possible, on doit avoir $(2b + d - 2a)^2 \overline{\gt} 8sd$; et partant, la plus grande valeur de s est $\frac{(2b + d - 2a)^2}{8d}$.

Ex. 1°. Un voleur s'enfuit en faisant 10 lieues par jour; un archer part 14 jours après du même lieu, et le poursuit en faisant 8 lieues le premier jour, et en augmentant chaque jour d'une lieue sa marche journalière. On demande au bout de combien de jours l'archer atteindra le voleur.

2°. Une personne jouit d'une rente annuelle de 600 frs. qu'elle économise, et fait valoir à intérêt simple au 5 $\frac{0}{0}$. D'une autre part, elle possède un capital de 5000 frs. qu'elle fait valoir à intérêt simple au 6 $\frac{0}{0}$, sans qu'elle le retire, et sans qu'il produise intérêt. On demande au bout de combien d'années le produit de ses rentes accumulées surpassera le capital et son intérêt de 580 frs.

3°. Tout est posé comme dans le 2°., excepté que le capital est de 6000 frs. au 5 $\frac{0}{0}$,

et que la somme du capital et de ses intérêts surpasse le produit des rentes accumulées de 420 francs.

§135. *Prob.* Soient deux progressions arithmétiques dont on conoît les deux premiers termes, et dont on connoît les différences des termes, de manière qu'au plus grand des deux premiers termes réponde la plus petite différence. On demande le nombre des termes qu'on doit prendre de chacune de ces deux suites pour que les sommes soient égales.

Soient a et a' les deux premiers termes donnés.

Soient d et d' les deux différences données.

Somme de la première progression, $na+d\times\frac{n(n-1)}{1.2}$.

Somme de la seconde progression, $na'+d'\times\frac{n(n-1)}{1.2}$.

Cond. $na+d\times\frac{n(n-1)}{1.2}n=a'+d'\times\frac{n(n-1)}{1.2}$.

Réd. $2a+d(n-1)=2a'+d'(n-1)$.

1er. *Cas.* Soit $a=a'$; on doit avoir $d=d'$ et le problème est indéterminé.

2d. *Cas.* Soit $a \gtrless a'$; et partant; $d' \gtrless d$.

$(n-1)(d'-d)=2(a-a')$; $n-1=2\times\frac{a-a'}{d'-d}=2\times\frac{a'-a}{d-d'}$.

Sol. $n=1+2\times\frac{a-a'}{d'-d}$.

Exem. Deux personnes partent ensemble d'un même lieu, et se meuvent dans un même sens ; l'une fait 8 lieues le premier jour, et elle augmente chaque jour sa marche d'une lieue ; l'autre fait 9 lieues le premier jour, et elle augmente chaque jour sa marche d'une demi-lieue. Quand est-ce que ces deux personnes se rencontreront ?

Une personne jouit d'une rente annuelle de 1000 frs. qu'elle économise, et fait valoir en intérêt simple au 5 %. Une autre personne jouit d'une rente de 900 frs. qu'elle économise et fait valoir en intérêt simple au 6 %. Au bout de combien d'années les produits de ces économies seront-ils égaux ?

§ 136. *Exerc. proposés.* Je dois à quelqu'un une somme c payable à présent. Au lieu de cela, nous convenons que j'acquitterai cette dette par un nombre n de paiemens annuels égaux s, à commencer dès à présent. Quelle doit être la grandeur de chaque paiement, pour que, après le dernier d'entr'eux, ma dette soit en effet acquittée, en ne comptant pour le tout que l'intérêt simple au 5 %, par exemple.

Une personne doit jouir pendant n années

d'une rente annuelle s : quelle est la valeur présente c de cette rente, en calculant l'intérêt simple à un taux donné r^o?

Des trois quantités c, s, n, déterminer l'une d'elles dans les deux autres.

Des quatre quantités, c, s, r, n, déterminer l'une d'elles dans les trois autres.

Une personne qui pourroit faire valoir son bien au $4\frac{o}{o}$ en achète une rente viagère au $10\frac{o}{o}$, qu'elle économise et fait valoir au $4\frac{o}{o}$ en intérêt simple. Au bout de combien d'années sera-t-elle rentrée en possession de son premier capital et de ses intérêts (simples) accumulés ?

Une personne possède un fonds de terre estimé 100000 frs. qui lui rapporte seulement 4000 frs. d'intérêt. Au commencement de chaque année, elle emprunte 6000 frs. dont elle est obligée de payer le $10\frac{o}{o}$. Elle laisse accumuler les intérêts de chaque emprunt (sans qu'ils portent eux-mêmes intérêt). Au bout de combien d'années cette personne sera-t-elle ruinée ?

§ 137. *Prob.* Un père fait son testament de la manière suivante : il donne à l'aîné de ses enfans la somme a et la $\frac{1}{n^{me}}$ partie du reste

de son bien; il donne au second la somme $2a$ et $\frac{1}{n^{me}}$ du reste, et ainsi de suite, en augmentant de a la première portion de chaque enfant. Par cette disposition, tout l'héritage est également partagé entre tous les enfans. On demande la valeur de l'héritage, le nombre des enfans, et la part de chacun (v. § 23).

Dén. Valeur de l'héritage x.

Premier reste, $x-a$.

Sec[de]. portion de l'aîné, $\frac{1}{n}x-\frac{1}{n}a$.

Bien de l'aîné, $\frac{1}{n}x+\frac{n-1}{n}a$.

Second reste, $\frac{n-1}{n}x-\frac{n-1}{n}a$.

Troisième reste, $\frac{n-1}{n}x-\frac{3n-1}{n}a$.

Sec[de].portion du 2[d]. $\frac{n-1}{nn}x-\frac{3n-1}{nn}a$.

Bien du second, $\frac{n-1}{nn}x+\frac{2nn-3n+1}{nn}a$

$$=\frac{n-1}{nn}x+\frac{(n-1)(2n-1)}{nn}a.$$

Cond. $\frac{1}{n}x+\frac{n-1}{n}a=\frac{n-1}{nn}x+\frac{(n-1)(2n-1)}{nn}a.$

Réd. $nx+n(n-1)a=(n-1)x+(n-1)(2n-1)a.$

$x=(n-1)(n-1)a=(n-1)^2a.$

Sol. $x=(n-1)^2a=(nn-2n+1)a.$

$x-a=n(n-2)a.$

$\frac{1}{n}x-\frac{1}{n}a=(n-2)a.$

$\frac{1}{n}x+\frac{n-1}{n}a=(n-1)a.$

$\frac{n-1}{n}x-\frac{n-1}{n}a=(n-1)(n-2)a=(nn-3n+2)a.$

$\frac{n-1}{n}x-\frac{3n-1}{n}=n(n-3)a.$

$\frac{n-1}{nn}x-\frac{3n-1}{nn}a=(n-3)a.$

$\frac{n-1}{nn}x+\frac{(n-1)(2n-1)}{nn}a=(n-1)a.$

L'héritage est donc exprimé par la première portion de l'aîné a, prise un nombre de fois egal au carré du dénominateur diminué d'une unité ; la part de chacun des deux premiers enfans est $(n-1)a$; et partant, si le partage est possible, la part de chaque enfant est $(n-1)a$, et leur nombre est $n-1$.

Pour prouver cette possibilité, j'affirme que,

si m enfans ayant pris leur première et leur seconde portions, conformément à l'énoncé, ont été également partagés et ont eu chacun $(n-1)a$, le $m+1^{me}$ enfant aura aussi $(n-1)a$.

En effet, si m enfans ont pris chacun $(n-1)a$, ils ont pris en tout $m(n-1)a$, et il restera à l'héritage $(n-1)(n-1-m)a=(nn-n(2+m)+(m+1))a$.

Le $m+1^{me}$ enfant ou le suivant prend pour première portion $(m+1)a$; il reste à l'héritage $n(n-(m+2))a$; il prend pour seconde portion $(n-(m+2))a$; mais il a pris pour première portion $(m+1)a$; donc il a pris en tout $(n-1)a$.

Puis donc que, par la disposition du testateur les deux aînés de ses enfans ont été également partagés, il en sera de même du troisième, puis du quatrième, . . . jusqu'au $n-1^{me}$, qui aura pour première et unique portion $(n-1)a$.

Aut. ex. Les premières portions des enfans successifs croissent comme les nombres impairs $1a$, $3a$, $5a$, $7a$, ... et leurs secondes portions sont les $\frac{2}{2n+1}$ des restes.

On trouve :

Valeur de l'héritage . . . . $n(2n-1)a$.
Part de chaque enfant . . . . $(2n-1)a$.
Nombre des enfans . . . . . n.

Les premières portions des enfans successifs croissent dans la progression arithmétique, $1a, 4a, 7a, 10a; \ldots$ leurs secondes portions sont les $\frac{3}{3n+1}$ des restes.

§ 138. *Prob.* Trouver quatre nombres en progression arithmétique, en connoissant le produit p des termes moyens, et le produit p' des deux extrêmes.

Dén. Soit $2x$ la somme cherchée des deux moyens.

Demi-différence des deux moyens $\sqrt{(xx-p)}$.

Termes moyens . $x+\sqrt{(xx-p)}$, $x-\sqrt{(xx-p)}$.

Termes extrêmes . $x+3\sqrt{(xx-p)}$, $x-3\sqrt{(xx-p)}$.

Produit des extrêmes . . $xx-9(xx-p)=9p-8xx$.

Cond. $9p-8xx=p'$.

Réd. $8xx=9p-p'$. $xx=\frac{9p-p'}{8}$.

$xx-p=\frac{p-p'}{8}$.

Sol. $x+\sqrt{(xx-p)}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{9p-p'}{2}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{p-p'}{2}}$.

$x-\sqrt{(xx-p)}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{9p-p'}{2}}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{p-p'}{2}}$.

$x+3\sqrt{(xx-p)}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{9p-p'}{2}}+\frac{3}{2}\sqrt{\frac{p-p'}{2}}$.

$x-3\sqrt{(xx-p)}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{9p-p'}{2}}-\frac{3}{2}\sqrt{\frac{p-p'}{2}}$.

Ex. Soit, $p=35$, 48.
$p'=27$, 40.

Rem. 1[re]. On peut aussi résoudre cette question en cherchant la somme et la différence des moyens.

Dén. Somme des moyens . . . $2x$.
Différence. . . . . $2y$.

Termes moyens . . . . $\begin{array}{l} x+y \\ x-y \end{array}$.

Termes extrêmes . . . . . . $\begin{array}{l} x+3y \\ x-3y \end{array}$.

Produit des moyens . . . . $xx-yy$.
Produit des extrêmes . . . $xx-9yy$.

Cond. $\left\{\begin{array}{l} xx-yy=p \\ xx-9yy=p'. \end{array}\right.$

Réd. $8yy=p-p'$. $yy=\frac{p-p'}{8}$,

$8xx\ =9p-p'$. $xx=\frac{9p-p'}{8}$.

Rem. 2[de]. Si on recherche immédiatement l'un des quatre termes demandés, on parvient à une équation bicarrée.

Soient x et $\frac{p}{x}$ les deux termes moyens.

Les deux termes extrêmes sont :

$$2x-\frac{p}{x}=\frac{2xx-p}{x}\text{; et }\frac{2p}{x}-x=\frac{2p-xx}{x}.$$

Produit des deux termes extrêmes,

$$\frac{5pxx-2pp-2x^4}{xx}.$$

Cond. $$\frac{5pxx-2pp-2x^4}{xx}=p'.$$

Réd. $2x^4-xx(5p-p')+2pp=o.$

$$16x^4-8xx(5p-p')+(5p-p')^2=(5p-p')^2-16pp$$
$$=9pp-10pp'+p'p'=(9p-p')(p-p')$$
$$4xx=5p-p'\pm\sqrt{(9p-p')(p-p')};$$
$$xx=\frac{5p-p'\pm\sqrt{(9p-p')(p-p')}}{4}$$
$$=\tfrac{1}{4}\left(\sqrt{\left(\frac{9p-p'}{2}\right)}\pm\sqrt{\left(\frac{p-p'}{2}\right)}\right).$$

Sol. $$x=\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{9p-p'}{2}}\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{p-p'}{2}}.$$

$$\frac{p}{x}=\frac{2p}{\sqrt{\frac{9p-p'}{2}}\pm\sqrt{\frac{p-p'}{2}}}=\tfrac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{9p-p'}{2}\right)}\mp\tfrac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{p-p'}{2}\right)}.$$

Aut. ex. On connoît le produit des moyens et la somme ou la différence des carrés des extrêmes.

On connoît le produit des extrêmes et la somme ou la différence des carrés des moyens.

On connoît la somme ou la différence des carrés des moyens, et la somme ou la différence des carrés des extrêmes (cet exercice

général donne lieu à quatre problèmes particuliers ; celui qui est relatif aux deux différences est indéterminé ; savoir : dans toute progression arithmétique de quatre termes, la différence des carrés des extrêmes est triple de la différence des carrés des moyens).

Exercices analogues sur une progression arithmétique, composée de cinq termes.

§ 139. Jeu proposé comme exercice de raisonnement.

On demande de disposer en carré les neuf premiers nombres naturels, de manière que, dans chacun des sens horizontaux, verticaux, et diagonaux, on ait une même somme.

La somme des neuf premiers nombres naturels est 45. Le tiers de cette somme est 15; donc, la somme constante qui doit se trouver dans chaque sens est 15.

La case du milieu appartient à quatre sens, savoir, à un sens horizontal, à un sens vertical, et à deux sens diagonaux : donc, la somme des nombres placés dans les deux cases extrêmes de chacun de ces sens, doit aussi être la même. Mais, les neuf premiers nombres naturels donnent les quatre paires de nombres $\genfrac{}{}{0pt}{}{1}{9}, \genfrac{}{}{0pt}{}{2}{8}, \genfrac{}{}{0pt}{}{3}{7}, \genfrac{}{}{0pt}{}{4}{6}$, dont la somme de cha-

cune est la même; donc ces huit nombres doivent être placés dans les cases qui forment le contour du carré; et partant, le nombre à placer dans la case du milieu est 5.

Si on plaçoit 1 à une case du coin, et par conséquent 9 à la case du coin opposée, on devroit parmi les six nombres $\frac{2}{8}, \frac{3}{7}, \frac{4}{6}$, trouver deux paires de nombres dont la somme fît 6. Mais, parmi ces six nombres, il n'en est que deux, savoir, 2 et 4 dont la somme est 6. Donc, 1 et 9 ne peuvent pas être placés dans des cases des coins; donc ils doivent être placés dans les cases du milieu d'un des côtés du carré; 2 et 4 devront être placés dans les cases du coin du rang dont 9 occupe la case du milieu; 8 et 6, seront placés dans les cases opposées des coins; enfin, 3 et 7 seront placés dans les deux cases restantes, de manière que les nombres 8, 3, 4, soient dans un même rang (1).

---

(1) La disposition qu'on vient d'exécuter, est appelée *carré magique*. On l'a étendue à la disposition des termes d'une progression arithmétique quelconque, dans les cases d'un carré d'un nombre quelconque de cases, de manière que, dans tous les sens horizontaux, verticaux et diagonaux, on ait une même somme. Ce sujet, quoique de simple curiosité, a occupé plusieurs Mathématiciens, qui ont donné des règles générales, pour la construction des carrés magiques. On doit envisager le cas particulier que j'ai développé, uniquement sous le point de vue logique, comme exercice de raisonnement.

CHAPITRE X.

t. p 364

Sur les Nombres figurés.

§ 140. Nous avons vu, dans le chapitre précédent, que la somme des nombres naturels donne les nombres triangulaires; je passe à la sommation de ces derniers nombres. Soit s, cette somme. Pour l'obtenir, soit décomposé chaque nombre triangulaire dans les nombres naturels dont il est la somme; on obtient:

$$\begin{array}{lllllll}
1 & =1 & & & & & \\
3 & =1 & +2 & & & & \\
6 & =1 & +2 & +3 & & & \\
10 & =1 & +2 & +3 & +4 & & \\
15 & =1 & +2 & +3 & +4 & +5 & \\
. & & & & & & \\
. & & & & & & \\
. & & & & & & \\
\frac{n(n+1)}{1.2} & =1 & +2 & +3 & +4 & +5+ & \ldots +n
\end{array}$$

$$s = 1.n+2(n-1)+3(n-2)+4(n-3)+5(n-4)\ .\ +n(n-(n-1))$$

$$= n(1+2+3+4+5+\ .\ .\ .\ .\ .\ n)$$

$$-(1.2+2.3+3.4+4.5+\ .\ .\ .\ .\ .\ +(n-1)n)$$

{chaque terme est le double de ceux de la colonne de gauche jusqu'à l'avant dernier

$$=n\times\frac{n(n+1)}{1.2}-2\left(s-\frac{n(n+1)}{1.2}\right)=\frac{n(n+1)}{1.2}(n+2)-2s.$$

$$3s=\frac{n(n+1)}{1.2}(n+2);\quad s=\frac{n(n+1)(n+2)}{1.\ 2.\ 3}.$$

Les sommes des nombres triangulaires sont appelées *nombres pyramidaux*, parce que ces nombres indiquent les nombres des points rangés en pyramides triangulaires à base équilatérale. L'expression du n^{me} nombre pyramidal est donc, $\frac{n(n+1)(n+2)}{1.\ 2.\ 3.}$.

Pour prouver synthétiquement cette expression trouvée analytiquement, il faut prouver que si elle est vraie pour une certaine valeur de n, elle est vraie pour la valeur suivante. Or, elle est vraie pour les premières valeurs de n, telles que 1, 2, 3, 4, 5, etc.....; donc elle sera vraie pour toutes les valeurs suivantes.

Qu'on ait prouvé que la somme des n premiers nombres triangulaires ou le n^{me} nombre pyramidal est $\frac{n(n+1)(n+2)}{1.\ 2.\ 3.}$; soit ajouté le $n+1^{\text{me}}$ nombre triangulaire, qui est $\frac{(n+1)(n+2)}{1.\ 2}$; on obtient pour somme :

$\frac{(n+1)(n+2)}{1.\ 2}$

$$\frac{(n+1)(n+2)}{1.\ 2}\left(\frac{n}{3}+1\right)=\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1.\ 2.\ 3};$$

expression qui est la même que l'expression supposée en substituant $n+1$ à n.

Les nombres pyramidaux sont donc :

$$1,\ 4,\ 10,\ 20,\ 35,\ 56,\ 84,\ \ldots\ \frac{n(n+1)(n+2)}{1.\ 2.\ 3}.$$

Rem. Un nombre pyramidal $\frac{n(n+1)(n+2)}{1.\ 2.\ 3}$, est au nombre triangulaire correspondant $\frac{n(n+1)}{1.2}$ pris autant de fois qu'il y en a, dans le rapport de $\frac{n+2}{3}$ à n, ou de $1+\frac{2}{n}$ à 3; et partant, ce rapport approche d'être celui de 1 à 3, d'autant plus qu'on prend un plus grand nombre de termes.

§ 141. En décomposant chaque nombre carré dans les nombres impairs dont il est la somme, on sommeroit de la même manière les nombres carrés; mais on peut aussi tirer l'expression de cette dernière somme, de la propriété démontrée § 131, *Rem.* 1re. qu'un nombre carré est la somme de deux nombres triangulaires successifs, dont le plus grand est celui qui lui correspond.

En effet, puisque

$$1^2=1$$
$$2^2=1+3$$
$$3^2=\quad 3+6$$
$$4^2=\qquad 6+10$$
$$5^2=\qquad\quad 10+15$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$(n-1)^2=\;.\;.\;.\;\frac{(n-2)(n-1)}{1.\;2}+\frac{(n-1)n}{1.2}.$$
$$n^2=.\;.\;.\;.\;.\;\frac{(n-1).n}{1.2}+\frac{n(n+1)}{1.2}.$$

$$S.n^2=2\left(1+3+6+10+15+\ldots+\frac{(n-1)n}{1.2}\right)+\frac{n(n+1)}{1.2}$$

formule p.32

$$=2\,\frac{(n-1)(n)(n+1)}{1.\;2.\;3}+\frac{n(n+1)}{1.2}$$

$$=\frac{n(n+1)}{1.2}\left(2\,\frac{n-1}{3}+1\right)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{1.\;2.\;3}.$$

Les sommes des nombres carrés, indiquent les nombres de boules égales rangées en pyramide à base carrée, et ces sommes peuvent être appelées nombres pyramidaux quadrangulaires.

Deux nombres pyramidaux correspondans l'un triangulaire et l'autre quadrangulaire, sont

entr'eux dans le rapport de $n+2$ à $2n+1$; ou de 1 à $2-\frac{3}{n+2}$. La limite de ce rapport est celui de 1 à 2.

§ 142. En général, les sommes des nombres polygonaux forment des nombres pyramidaux, dont la dénomination dépend de celle des nombres polygonaux dont ils sont les sommes.

Ainsi, d étant la différence constante de la progression arithmétique, ayant pour premier terme l'unité, qui donne lieu aux nombres polygonaux dont l'expression générale est $n+d\times\frac{(n-1)n}{1.2}$, les nombres pyramidaux correspondans ont pour expression générale, $\frac{n(n+1)}{1.2}+d\times\frac{(n-1)(n)(n+1)}{1.\ 2.\ 3}$; et partant, l'expression générale des nombres pyramidaux de tous les noms, dépend seulement des nombres triangulaires, et des nombres pyramidaux triangulaires.

Soit une progression arithmétique,

$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d, \ldots a+(n-1)d.$

Les sommes des termes de cette progression

sont : a, $2a+d$, $3a+3d$, $4a+6d$, ... $na+\frac{(n-1)n}{1.2}d$.

Les sommes de ces sommes sont : a, $3a+d$, $6a+4d$, $10a+10d$, $\frac{n(n+1)}{1.2}a+\frac{(n-1)n(n+1)}{1.\ 2.\ 3}d$.

Partant, ces sommes sont exprimées dans les nombres triangulaires et dans les nombres pyramidaux.

§ 143. Soient pris les carrés des termes de cette progression, et soit cherchée la somme de ces carrés. Cette somme est composée des trois parties suivantes : 1°. du carré du premier terme a, pris autant de fois qu'il y a de termes, ou de $n\times aa$; 2°. du double produit $2ad$ multiplié par la somme des $n-1$ premiers nombres naturels, et partant de $2ad \times \frac{(n-1)n}{2}$; 3°. du carré dd multiplié par la somme des carrés des $n-1$ premiers nombres naturels, ou de $dd\times \frac{(n-1)(n)(2n-1)}{1.\ 2.\ 3}$; donc, la somme des carrés des termes de cette progression est $naa+2\frac{n(n-1)}{1.2}ad+\frac{(n-1)n(2n-1)}{1.\ 2.\ 3}dd$.

Exerc. On demande la somme des carrés

des n premiers nombres impairs. Cette somme est $n+2n(n-1)+4.\frac{(n-1)n(2n-1)}{1.\ 2.\ 3}$ $=n(2n-1)+4.\frac{(n-1)n(2n-1)}{1.\ 2.\ 3}=2\frac{n(2n-1)(2n+1)}{1.\ 2.\ 3}$

Dans cet exemple, on trouveroit la même expression de cette somme, en prenant l'excès de la somme des carrés des $2n-1$ premiers nombres naturels, sur la somme des carrés des $n-1$ premiers nombres pairs. On a : $\frac{(2n-1)2n.(4n-1)}{1.\ 2.\ 3}-4.\frac{(n-1)n(2n-1)}{1.\ 2.\ 3}$ $=\frac{(2n-1)2n(2n+1)}{1.\ 2.\ 3}$; expression qui est celle du $2n-1$ premier nombre pyramidal triangulaire.

Rem. En exprimant symétriquement les termes de la progression proposée, en partant du terme moyen ou des termes moyens, suivant que leur nombre est impair ou pair, on peut obtenir une expression plus simple de cette somme.

1er. *Cas.* Soit la progression composée d'un nombre impair de termes $2n+1$, dont le terme du milieu est a, et la différence des termes successifs d. La somme des carrés de ses ter-

mes est : $aa(2n+1)+2dd\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{1.\ 2.\ 3}$.

2^d^. *Cas*. Que le nombre des termes soit pair $2n$; soit $2d$ la différence de deux termes successifs : la somme des carrés est : $2n\times aa+2dd(1^2+3^2+5^2+\ldots.+(2n-1)^2)$ $=2naa+2dd\frac{(2n-1)2n(2n+1)}{1.\ 2.\ 3}$.

Aut. exerc. Soient deux progressions arithmétiques composées d'un même nombre de termes. Soient pris les produits des termes correspondans de ces deux progressions deux à deux : on demande la somme de ces produits.

§ 144. Les nombres pyramidaux triangulaires et carrés sont les plus importans par leurs applications. Je vais exposer celle qui est relative à la sommation des boulets dans les arrangemens les plus usités dans les arsenaux.

Outre les deux arrangemens en pyramides triangulaires et quadrangulaires, on dispose le plus souvent les boulets, de manière que chaque couche est un rectangle, dont les côtés vont en diminuant d'une unité depuis la base jusqu'à la crête.

Soit m le nombre des boulets à la crête, et soit n le nombre des boulets au petit côté

de la base. Les boulets des couches successives à compter depuis la crête, sont : $1 \times m, 2(m+1)$, $3(m+2), 4(m+3), 5(m+4), \ldots n(m+(n-1))$.

Partant, le nombre total des boulets est :
$m(1+2+3+4+5+\ldots\ldots\ldots+n)$
$+(1.2+2.3+3.4+4.5+\ldots\ldots+(n-1)n)$.
$$=m\times\frac{n(n+1)}{1.2}+2\times\frac{(n-1)n(n+1)}{1.2.3}.$$

Autrem. Soit $m+1$ le nombre des boulets à la crête. Les boulets des couches successives, à compter depuis la crête, sont : $1(m+1)$, $2(m+2), 3(m+3), 4(m+4), 5(m+5), \ldots\ldots n(m+n)$.
Partant, le nombre total des boulets est :
$m(1+2+3+4+5+\ldots\ldots\ldots+n)$
$+(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+\ldots\ldots+n^2)$
$$=m\times\frac{n(n+1)}{1.2}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{1.2.3}.$$

§ 145. *Prob.* On demande une progression arithmétique, en connoissant le nombre de ses termes, leur somme, et la somme de leurs carrés.

1er. *Cas.* Que le nombre des termes soit impair : en divisant la somme donnée de la progression par le nombre des termes, on aura le terme moyen. Que ce terme moyen soit a. Soit $2n+1$ le nombre donné des termes ; soit q la somme donnée des carrés ; soit d

la différence cherchée des termes de la progression ; ces termes seront :

$$a, \begin{matrix} a+d, & a+2d, & a+3d, & a+4d, & a+5d, & a+6d, & \ldots\ldots & a+nd \\ a-d, & a-2d, & a-3d, & a-4d, & a+5d, & a-6d, & \ldots\ldots & a-nd \end{matrix}$$

en plaçant les uns sous les autres les termes également éloignés du terme du milieu. La somme des carrés sera :

$$(2n+1)aa+2dd(1+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+\ldots\ldots+n^2)$$

$$=(2n+1)aa+2dd\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{1.\ 2.\ 3}$$; dans cette expression on ignore seulement dd qui sera connu par la somme donnée des carrés.

2d. *Cas.* Que le nombre donné des termes soit pair $2n$. Divisant la somme donnée de la progression par le nombre de ses termes, on aura la demi-somme de chaque paire composée de deux termes également éloignés des extrêmes. Soit cette demi-somme a. Soit $2d$ la différence de deux termes successifs. Les termes de la progression seront :

$$\begin{matrix} a-d, & a-3d, & a-5d, & a-7d, & a-9d, & \ldots\ldots & a-(2n-1)d \\ a+d, & a+3d, & a+5d, & a+7d, & a+9d, & \ldots\ldots & a+(2n-1)d \end{matrix}$$

en plaçant les uns sous les autres les termes également éloignés des termes moyens ou des extrêmes. La somme des carrés sera :

$$2n\times aa+2dd(1+3^2+5^2+7^2+9^2+\ldots\ldots+(2n-1)^2).$$

Or, $1^2+3^2+5^2+7^2+9^2+\ldots+(2n-1)^2=\frac{(2n-1)2n(2n+1)}{1,\ 2.\ 3}$.

Donc, la somme donnée des carrés est : $2naa+2dd.\frac{(2n-1)2n(2n+1)}{1.\ 2.\ 3}$; de laquelle il est facile d'obtenir dd.

Aut. exercice. Déterminer une progression arithmétique, en connoissant la somme de ses termes, la somme de leurs carrés, et la somme de leurs cubes.

§ 146. De même qu'on a obtenu les nombres triangulaires, en sommant les nombres naturels; et les nombres pyramidaux en sommant les nombres triangulaires; on est appelé à chercher les sommes des nombres pyramidaux, puis les sommes de ces sommes, et ainsi de suite.

Les suites qu'on obtient par ces sommations successives, portent le nom de suites des *nombres figurés*. Cette dénomination générale est sans doute tirée des cas particuliers des nombres naturels, des nombres triangulaires, et des nombres pyramidaux, auxquels répondent des figures et des arrangemens de points.

Les nombres naturels (qui sont les sommes d'autant d'unités qu'ils en contiennent) seront appelés nombres figurés du premier ordre.

Les sommes des nombres naturels, ou les nombres triangulaires seront appelés nombres figurés du second ordre.

Les sommes des nombres triangulaires, ou les nombres pyramidaux, seront appelés nombres figurés du troisième ordre.

Les sommes des nombres pyramidaux ou des nombres figurés du troisième ordre seront appelées nombres figurés du quatrième ordre : et ici commence la généralisation de cette expression étendue au delà de son origine.

Les sommes des nombres figurés du quatrième ordre donnent les nombres figurés du cinquième ordre, et ainsi de suite ; de manière que les sommes des nombres figurés d'un ordre quelconque m^{me}, donnent les nombres figurés de l'ordre suivant $m+1^{me}$.

§ 147. Pour obtenir les nombres figurés du quatrième ordre soient décomposés les nombres figurés du troisième ordre, dans les nombres figurés du second ordre dont ils sont les sommes, et que cette somme soit désignée par s'''. On obtient :

$$1=1$$
$$4=1+3$$
$$10=1+3+6$$
$$20=1+3+6+10$$
$$35=1+3+6+10+15$$
$$\vdots$$
$$\frac{n(n+1)(n+2)}{1.\,2.\,3}=1+3+6+10+15+\ldots\ldots+\frac{n(n+1)}{1.2}.$$

On a, $s''' = n + 3(n-1) + 6(n-2) + 10(n-3) + \ldots \frac{n(n+1)}{1.2}(n-(n-1))$

$$= n(1+3+6+10+15+\ldots\ldots \frac{n(n+1)}{1.2})$$

$$-(1.3+2.6+3.10+4.15+\ldots\ldots \frac{(n-1)n(n+1)}{1.\ 2})$$

$$= n \times \frac{n(n+1)(n+2)}{1.\ 2.\ 3} - 3(s''' - \frac{n(n+1)(n+2)}{1.\ 2.\ 3})$$

$$4s''' = \frac{n(n+1)(n+2)}{1.\ 2.\ 3.}(n+3).\ s''' = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}.$$

On démontre synthétiquement cette formule trouvée analytiquement, en prouvant que, si elle est vraie pour une certaine valeur de n, elle est vraie pour la suivante.

Que la somme des n nombres figurés du troisième ordre ait été prouvée être $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$; à cette somme soit ajouté le $n+1^{me}$ nombre figuré du même ordre; on obtient : $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4} + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1.\ 2.\ 3.}$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1.\ 2.\ 3.}(\frac{n}{4}+1) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}.$$

§ 148. Pour obtenir les nombres figurés du cinquième ordre, ou les sommes des nombres figurés du quatrième ordre, soient dé-

composés les nombres figurés du quatrième ordre, dans les nombres figurés du troisième ordre, dont ils sont les sommes; et soit s^{IV}, la somme des nombres figurés du quatrième ordre. On aura :

$$\begin{array}{ll} 1 & =1 \\ 5 & =1+4 \\ 15 & =1+4+10 \\ 35 & =1+4+10+20 \\ 70 & =1+4+10+20+35 \\ . & \\ . & \\ . & \end{array}$$

$$\frac{n\ldots\ldots n+3}{1\ldots\ldots 4}=1+4+10+20+35+\ldots+\frac{n(n+1)(n+2)}{1.\,2.\,3}$$

$$s^{\text{IV}} \quad =1.n+4(n-1)+10(n-2)+20(n-3)+35(n-4)+\ldots$$

$$\ldots\ldots+\frac{n(n+1)(n+2)}{1.\,2.\,3}(n-(n-1))$$

$$=n(1+4+10+20+35+\ldots\frac{n(n+1)(n+2)}{1.\,2.\,3})$$

$$-(1.4+2.10+3.20+4.35+\ldots.(n-1)(\frac{n(n+1\ \ n+2)}{1.\,2.\,3})$$

$$=n\times\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.\,2.\,3.\,4}-4(s^{\text{IV}}-\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.\,2.\,3.\,4})$$

$$5s^{\text{IV}}=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.\,2.\,3.\,4}(n+4);\ s^{\text{IV}}=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3(n+4)}{1.\,2.\,3.\,4.\,5}.$$

Cette formule trouvée analytiquement se démontre synthétiquement, de la même ma-

nière que les précédentes, en prouvant que si elle est vraie pour une certaine valeur de n, elle est vraie pour la suivante. En effet :

$$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}+\frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.}$$

$$=\frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}\left(\frac{n}{5}+1\right)=\frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}.$$

§ 149. Les expressions générales des nombres figurés des cinq premiers ordres sont donc:

Voir Euler

$$\frac{n}{1}.$$

$$\frac{n}{1}.\frac{n+1}{2}.$$

$$\frac{n}{1}.\frac{n+1}{2}.\frac{n+2}{3}.$$

$$\frac{n}{1}.\frac{n+1}{2}.\frac{n+2}{3}.\frac{n+3}{4}.$$

$$\frac{n}{1}.\frac{n+1}{2}.\frac{n+2}{3}.\frac{n+3}{4}.\frac{n+4}{5}.$$

De là, on est porté à conclure par analogie, que les expressions générales des nombres figurés des ordres suivans, sont successivement :

$$\frac{n}{1}.\frac{n+1}{2}.\frac{n+2}{3}.\frac{n+3}{4}.\frac{n+4}{5}.\frac{n+5}{6}.$$

$$\frac{n}{1}.\frac{n+1}{2}.\frac{n+2}{3}.\frac{n+3}{4}.\frac{n+4}{5}.\frac{n+5}{6}.\frac{n+6}{7}.$$

$$\frac{n}{1}.\frac{n+1}{2}.\frac{n+2}{3}.\frac{n+3}{4}.\frac{n+4}{5}.\frac{n+5}{6}.\frac{n+6}{7}.\frac{n+7}{8}.$$

et qu'en général, le n^{me} nombre figuré du m^{me} ordre est:

$$\frac{n}{1}\cdot\frac{n+1}{2}\cdot\frac{n+2}{3}\cdot\frac{n+3}{4}\cdots\cdots\frac{n+(m-1)}{m}.$$

Pour confirmer cette analogie par une démonstration rigoureuse, je vais prouver que si la formule est vraie, tant pour un terme quelconque des nombres figurés d'un certain ordre, que pour les termes de l'ordre suivant jusqu'à une certaine valeur de n, elle est aussi vraie pour le terme suivant de cet ordre. Soit donc:

$$\frac{n}{1}\cdot\frac{n+1}{2}\cdot\frac{n+2}{3}\cdot\frac{n+3}{4}\cdots\cdots\frac{n+(m-1)}{m},$$

l'expression générale, démontrée vraie, du n^{me} nombre figuré du m^{me} ordre. Soit aussi,

$$\frac{n}{1}\cdot\frac{n+1}{2}\cdot\frac{n+2}{3}\cdot\frac{n+3}{4}\cdots\cdots\cdots\frac{n+m}{m+1};$$

l'expression des nombres figurés du $m+1^{me}$ ordre reconnue vraie pour une certaine valeur de n : j'affirme qu'elle est aussi vraie pour une valeur de n supérieure d'une unité.

En effet,

$$\frac{n}{1}\cdot\frac{n+1}{2}\cdot\frac{n+2}{3}\cdot\frac{n+3}{4}\cdots\frac{n+m}{m+1}+\frac{n+1}{1}\cdot\frac{n+2}{2}\cdot\frac{n+3}{3}\cdots\cdots\frac{(n+m)}{m}.$$

$$=\frac{n+1}{1}\cdot\frac{n+2}{2}\cdot\frac{n+3}{3}\cdot\frac{n+4}{4}\cdots\frac{n+m}{m}\left(\frac{n}{m+1}+1\right)$$

$$=\frac{n+1}{1}\cdot\frac{n+2}{2}\cdot\frac{n+3}{3}\cdot\frac{n+4}{4}\cdots\cdots\frac{n+1+m}{m+1};$$ formule qui est conforme à la formule supposée, en subtituant $n+1$ à n.

Tableau des nombres figurés.

Ordres	1er.	2^{d}.	3e.	4e.	5e.	6e.	7e.	8e.	9e.	10e.
O.	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1.
I.	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10.
II.	1,	3,	6,	10,	15,	21,	28,	36.	45,	55.
III.	1,	4,	10,	20,	35,	56,	84,	120,	165,	220.
IV.	1,	5,	15,	35,	70,	126,	210,	330,	495,	715.
V.	1,	6,	21,	56,	126,	252,	462,	792,	1287,	2002.
VI.	1,	7,	28,	84,	210,	462,	924,	1716,	3003,	5005.
VII.	1,	8,	36,	120,	330,	792,	1716,	3432,	6435,	11440.
VIII.	1,	9,	45,	165,	495,	1287,	3003,	6435,	13870,	25310.
IX.	1,	10,	55,	220,	715,	2002,	5005,	11440,	25310,	50620.
X.	1,	11,	66,	286,	1001.	3003,	8008,	19448,	44758,	95378.

Dans ce tableau, les termes d'un même ordre occupent une même ligne horizontale, et les termes qui occupent les mêmes places dans les différens ordres, sont situés sur une même ligne verticale.

Chaque terme d'un ordre est égal à la somme de tous ceux de l'ordre précédent, jusqu'à celui qui occupe la même place ; ou bien chaque terme est égal à la somme de tous les termes de la ligne horizontale précédente, prolongée jusqu'à la même ligne verticale.

De là, chaque terme est égal à la somme de deux termes qui le précèdent, l'un dans la même ligne horizontale, et l'autre dans la même ligne verticale.

Les colonnes verticales et les lignes horizontales, à égale distance chacune des premières de ces lignes, sont composées des mêmes termes.

Pour les nombres figurés du m^{me} ordre, les termes successifs sont :

$$1, \frac{m+1}{1}, \frac{m+1}{1}.\frac{m+2}{2}, \frac{m+1}{1}\dots\frac{m+3}{3}, \frac{m+1}{1}\dots\frac{m+4}{4},$$

$$\frac{m+1}{1}\dots\frac{m+5}{5}, \dots\dots\dots \frac{m+1}{1}\dots\frac{m+(n-1)}{n-1};$$

$$\text{ou}, \frac{n}{1}.\frac{n+1}{2}.\frac{n+2}{3}\dots\dots\dots\frac{n+(m-1)}{m}.$$

Il convient de prendre la première expression $\frac{m+1}{1}\dots\dots\frac{m+(n-1)}{n-1}$, lorsque $m>n$.

Il convient de prendre la seconde expression $\frac{n}{1}\dots\dots\frac{n+(m-1)}{m}$, lorsque $m<n$.

§ 150. Si on renverse les expressions des nombres figurés, on obtient les *inverses* de ces nombres. Ainsi, l'expression générale des inverses

inverses des nombres triangulaires, est $\frac{1.2}{n(n+1)}$; celle des inverses des nombres pyramidaux est $\frac{1.\,2.\,3}{n(n+1)(n+2)}$. En général, l'expression des inverses des nombres figurés du m^{me} ordre, est $\frac{1.\,2.\,3\ldots\ldots\ldots m}{n(n+1)(n+2)\ldots.n+(m-1)}$.

On peut décomposer chacun des inverses des nombres figurés d'un certain ordre, dans deux inverses des nombres figurés de l'ordre précédent, dont l'un lui correspond, et dont l'autre suit ce dernier. En effet,

$$\frac{1.2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right).$$

$$\frac{1.\,2.\,3}{n(n+1)(n+2)}=3\left(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right).$$

$$\frac{1.\,2.\,3.\,4}{n(n+1)(n+2)(n+3)}=8\left(\frac{1}{n(n+1)(n+2)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right);$$

En général, $\frac{1.\;2.\;3\ldots\ldots m}{n(n+1)(n+2)\ldots.n+(m-1)}$

$$=\frac{1.2.3\ldots m}{m-1}\left(\frac{1}{n(n+1)\ldots n+(m-2)}-\frac{1}{(n+1)n+2)\ldots n+(m-1)}\right)$$

§ 151. De là, il est aisé de trouver les sommes des inverses des nombres figurés.

I. Soit s'' la somme des inverses des n premiers nombres triangulaires,

$$\frac{1}{1.2}=\tfrac{1}{1}-\tfrac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2.3}=\quad\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3.4}=\quad\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}$$

.
.
.

$$\frac{1}{(n-1)n}=\quad\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{n(n+1)}=\quad\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$

Donc, $s''=2(1\quad-\frac{1}{n+1})$.

Or, plus n est grand, plus $\frac{1}{n+1}$ est petit; et cette quantité $\frac{1}{n+1}$ peut être rendue plus petite qu'aucune quantité assignée; donc aussi, la somme des inverses des n premiers nombres triangulaires peut différer de 2, moins que d'aucune quantité assignée. Le nombre 2 est la *limite* en grandeur de la somme des inverses des nombres triangulaires, à commencer par le premier d'entr'eux.

II. Soit s''' la somme des inverses des n premiers nombres pyramidaux.

$$\frac{1}{1.2.3}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1.2}-\frac{1}{2.3}\right)$$

$$\frac{1}{2.3.4}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2.3}-\frac{1}{3.4}\right)$$

$$\frac{1}{3.4.5}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3.4}-\frac{1}{4.5}\right)$$

.

.

.

$$\frac{1}{(n-1)n.(n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(n-1)n}-\frac{1}{n(n+1)}\right)$$

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right);$$

De là, $s'''=3\left(\frac{1}{1.2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$.

Partant, la limite en grandeur de la somme des inverses des nombres pyramidaux est $1\frac{1}{2}$.

III. On trouve de même, que la somme s^{IV} des inverses des n nombres figurés du 4me ordre est $\frac{1.2.3.4}{3}\left(\frac{1}{1.2.3}-\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right)$; et partant, que la limite en grandeur de cette somme est $1\frac{1}{3}$.

En général, la somme s^{M} des inverses des n premiers nombres figurés du m^{me} ordre est
$$\frac{1.2.3\ldots m}{m-1}\left(\frac{1}{1.2.3\ldots(m-1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)\ldots n+(m-1)}\right)$$
et la limite en grandeur de cette somme est $\frac{m}{m-1}$.

§ 152. La détermination, tant des sommes des inverses des nombres figurés, que celle des limites de ces sommes, est fondée sur la décomposition en facteurs des dénominateurs des fractions qui les expriment; aussi les formules obtenues par cette décomposition, ne peuvent-elles pas s'appliquer aux cas où elle n'a pas lieu.

En particulier, ces formules ne peuvent pas s'appliquer aux inverses des nombres naturels ou des nombres figurés du premier ordre. En effet, l'expression de la limite appliquée à ce cas, devient $\frac{1}{0}$; ce qui indique son impossibilité.

J'affirme que la somme des inverses des nombres naturels n'a aucune limite en grandeur.

Lemme. Soit une suite des termes inverses des nombres naturels; j'affirme que la somme des deux termes extrêmes est plus grande, que la somme de deux termes également éloignés des extrêmes.

Soient $m-n$ et $m+n$, les deux nombres naturels auxquels répondent les deux termes extrêmes; et soient $m-n'$ et $m+n'$ deux autres nombres naturels compris entre les premiers, et respectivement également éloignés

d'eux ; de manière que $n'<n$. J'affirme que
$\frac{1}{m-n}+\frac{1}{m+n}>\frac{1}{m-n'}+\frac{1}{m+n'}$.

Dém. $\frac{1}{m-n}+\frac{1}{m+n}=\frac{2m}{mm-nn}$; et
$\frac{1}{m-n'}+\frac{1}{m+n'}=\frac{2m}{mm-n'n'}$; donc, ces deux sommes sont entr'elles comme $mm-n'n'$ et $mm-nn$. Mais, puisque $n'<n$, $mm-n'n'>mm-nn$; donc, la première somme est plus grande que la seconde.

1er. *Cor.* En particulier, le nombre des termes étant impair, la somme de deux termes également éloignés du terme moyen, est plus grande que le double du terme moyen.

2^d^. *Cor.* La somme de tous les termes est plus grande que le terme moyen pris autant de fois qu'il y a de termes.

Appl. Soient $\frac{1}{m}$, $\frac{1}{m+1}$, $\frac{1}{m+2}$ .... $\frac{1}{m+n-1}$, $\frac{1}{m+n}$, $\frac{1}{m+n+1}$ ..... $\frac{1}{m+2n}$, $2n+1$ termes successifs de la suite des inverses des nombres naturels, à partir d'un terme assigné, $\frac{1}{m}$; j'affirme qu'on peut déterminer n

de manière que la somme de tous ces termes soit plus grande que l'unité.

En effet, la somme de tous ces termes est plus grande que $2n+1$ fois le terme moyen, ou que $\frac{2n+1}{m+n}$. Mais, $\frac{2n+1}{m+n}=1$, lorsque $n=m-1$; donc, m étant plus grand que l'unité, on peut toujours déterminer n de manière que la somme de tous les termes soit plus grande que 1.

Ex. $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}> 3\cdot\frac{1}{3}>1$; $\frac{1}{5}\ldots\frac{1}{13}> 9\cdot\frac{1}{9}>1$.
$\frac{1}{14}+\ldots\frac{1}{40}> 27\cdot\frac{1}{27}>1$; $\frac{1}{41}+\ldots\frac{1}{121}> 81\cdot\frac{1}{81}>1$.
$\frac{1}{122}+\ldots\frac{1}{364}>243\cdot\frac{1}{243}>1$; $\frac{1}{365}+\ldots\frac{1}{1093}>729\cdot\frac{1}{729}>1$.

Conclusion principale. Dans la suite des inverses des nombres naturels, on peut prendre autant qu'on le veut de suites successives de termes, telles, que la somme de chacune d'elles est plus grande que l'unité; et partant aussi, on peut y prendre une suite de termes dont la somme vaille plus que l'unité prise un nombre de fois aussi grand qu'on le veut; donc la somme des inverses des nombres naturels n'a aucune limite en grandeur (1).

---

(1) La démonstration que je viens de donner de cette propriété de la suite des inverses des nombres naturels, me paroît plus lumineuse que la démons-

Défin. La suite des inverses des nombres naturels, a été appelée *suite* ou *progression harmonique*, à cause de l'application de ses premiers termes aux accords fondamentaux de la musique : elle trouve encore d'autres applications à la physique. On a étendu son nom à toutes les suites qu'on obtient quand on divise une quantité constante par les termes d'une progression arithmétique. Trois termes successifs d'une progression harmonique forment une proportion harmonique continue; leur expression générale, est $\frac{c}{a-d}, \frac{c}{a}, \frac{c}{a+d}$, et partant, ces trois termes sont entr'eux comme $a(a+d)$, $(a+d)(a-d)$, $a(a-d)$.

La différence des deux premiers termes est $d(a+d)$; la différence des deux derniers est $d(a-d)$; et partant, la différence des deux premiers termes, est à la différence des deux derniers, comme le premier terme est au troisième ; tandis que dans la proportion géométrique ces deux différences sont entr'elles comme le premier terme est au second.

---

tration indirecte, donnée par J[n]. BERNOUILLI; et plus simple que la démonstration directe, donnée par Jaq. BERNOUILLI. *Voy.* le traité des suites infinies de ce dernier à la suite de l'*Ars conjectandi*.

Soient a, b, c, trois termes d'une proportion harmonique; de la proportion $a-b:b-c=a:c$; on peut tirer l'équation $ac-bc=ab-ac$; et de là, deux quelconques des trois quantités a, b, c, étant données, on peut déterminer la troisième. On a $c=\frac{ab}{2a-b}$, $a=\frac{bc}{2c-b}$, $b=\frac{2ac}{a+c}$; et partant, le moyen harmonique entre deux nombres donnés, est troisième proportionnel au moyen arithmétique et au moyen géométrique entre ces deux nombres.

CHAPITRE XI.

Sur les Permutations et sur les Combinaisons.

Première Partie.

Sur les Permutations ou changemens d'ordre.

§ 153. Soient deux lettres ou quantités quelconques différentes, a et b, elles peuvent être rangées de deux manières, ab, ba.

Soient trois lettres différentes, a, b, c; une quelconque de ces lettres, telle que a, occupant une place déterminée telle que la première, les deux autres lettres b et c peuvent être arrangées de deux manières dans les deux places restantes. Mais chacune des trois lettres peut occuper cette place déterminée; donc, le nombre des manières dont ces trois lettres peuvent être arrangées, est 3×2 ou 6, conformément au tableau suivant :

abc bac cab,
acb bca cba.

Soient quatre lettres différentes a, b, c, d;

quelle que soit la place qu'occupe une de ces lettres, les trois autres lettres peuvent être arrangées de six manières; mais chaque lettre peut occuper cette place déterminée; donc, le nombre des arrangemens de quatre lettres est $4\times6=24=4\times3\times2\times1$.

On montreroit de même que le nombre des manières dont peuvent être arrangées, 5, 6, 7, 8, 9, 10 . . . . . . n lettres différentes, est exprimé par le produit continuel des 5, 6, 7, 8, 9, 10 . . . n premiers nombres naturels.

Exemp. Le nombre des manières de disposer les 24 lettres de l'alphabet, est exprimé par le produit continuel des 24 premiers nombres naturels.

§ 154. Dans ce qui précède, j'ai supposé que toutes les lettres à arranger étoient différentes. Que parmi n lettres, il y en ait deux qui soient les mêmes, par exemple, deux a. Pour chaque arrangement déterminé des $n-2$ lettres restantes, les deux lettres semblables a auroient été susceptibles de deux arrangemens différens si elles avoient été différentes. Ces deux arrangemens sont réduits à un seul si elles sont les mêmes; et partant, le nombre total des arrangemens de n lettres

dont 2 seulement sont semblables entr'elles, est réduit à la moitié de ce qu'il seroit si toutes les lettres étoient différentes. Ce nombre est donc $\frac{1.2.3.4\ldots n}{1.2}=3.4.5\ldots n.$

De même, que trois lettres soient semblables entr'elles. Le nombre des arrangemens auxquels donneroient lieu toutes les lettres si elles étoient toutes différentes entr'elles, doit être divisé par le nombre des arrangemens dont sont susceptibles trois lettres différentes, le nombre cherché des arrangemens auxquels donnent lieu n lettres dont trois sont semblables entre elles, est donc $\frac{1.2.3.4.5\ldots n}{1.2.3}=4.5.6.7\ldots n.$

En général, que de n lettres il en y ait m semblables entr'elles. Le nombre des arrangemens auxquels donnent lieu ces n lettres est

$$\frac{1.2.3.4\ldots m(m+1)\ldots n}{1.2.3.4\ldots m}=(m+1)(m+2)(m+3)\ldots n.$$

§ 155. Que de n lettres, il y en ait m d'une même espèce, et m' d'une autre espèce. Le nombre des arrangemens auxquels auroient donné lieu les $n-m$ lettres, si elles avoient été toutes différentes entr'elles, doit être divisé par le nombre des arrangemens auxquels

auroient donné lieu les m' lettres, si elles avoient été différentes : ce nombre est donc :

$$\frac{(m+1)(m+2)(m+3)\ldots\ldots\ldots n}{1. \quad 2. \quad 3\ldots\ldots\ldots m'}.$$

S'il y a de nouveau m'' lettres d'une troisième espèce, le nombre des arrangemens sera $\frac{(m+1)(m+2)(m+3)\ldots\ldots\ldots n}{1.2.3\ldots\ldots m'. \quad 1.2.3\ldots m''}$; et ainsi des autres.

En général, on doit diviser le produit continuel qui exprime le nombre des arrangemens auxquels donneroient lieu toutes les lettres si elles étoient toutes différentes, par le produit continuel fait des produits qui expriment les arrangemens dont seroient susceptibles les lettres de chaque espèce, si elles étoient différentes.

§ 156. Le cas le plus important et qui se présente le plus souvent, est celui où les lettres à arranger sont de deux espèces seulement; en sorte que de n lettres, il y en a m d'une espèce, et $n-m$ de l'autre.

Le nombre des arrangemens auxquels ce cas donne lieu est : $\frac{1.2.3\ldots m.m+1.m+2\ldots n}{1.2.3\ldots m. \quad 1.2.3\ldots n-m}$

$$\text{ou}, \frac{1.2.3.4\ldots(n-m)(n-(m-1))(n-(m-2))\ldots n-2.\,n-1.\,n}{1.2.3.4\ldots.n-m.\quad 1.\quad 2.\quad 3\ldots\ldots m}$$

$$=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots n-(m-1)}{1.\,2.\,3\ldots.\quad m}=\frac{(m+1)(m+2)\ldots.n}{1.\quad 2\ldots\ldots n-m}.$$

Il convient de prendre la première de ces expressions ou la seconde, suivant que m est plus petit ou plus grand que la moitié de n.

Valeurs de m.	Nombre des arrangemens correspondans.
1 / $n-1$	$\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{n}{1}.$
2 / $n-2$	$\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.$
3 / $n-3$	$\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}.$
4 / $n-4$	$\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}.\frac{n-3}{4}.$
5 / $n-5$	$\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}.\frac{n-3}{4}.\frac{n-4}{5}.$
.	
.	
.	
m / $n-m$	$\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}.\frac{n-3}{4}.\frac{n-4}{5}\ldots\frac{n-(m-1)}{m}.$

Or, l'expression $\frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}.\frac{n-3}{4}\ldots\frac{n-(m-1)}{m}$, est celle du $n-(m-1)^{me}$ nombre figuré du m^{me} ordre ; partant, le nombre des manières dont peuvent être arrangées n lettres dont m sont d'une espèce, et $n-m$ sont d'une autre espèce,

est égal au nombre $n-(m-1)^{me}$ figuré du m^{me} ordre.

On peut donc appliquer aux permutations des assemblages de lettres de deux espèces, ce qui a été remarqué sur les nombres figurés dans le § 149. En particulier, la somme des arrangemens de n lettres de deux espèces en supposant, 1°. m lettres d'une espèce, et 2°. $m+1$ lettres de cette espèce; est égale au nombre des arrangemens de $n+1$ lettres de ces deux espèces, en supposant $m+1$ lettres de la première espèce.

En effet, les deux premiers nombres sont:

$$\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\cdot\frac{n-3}{4}\cdots\frac{n-(m-1)}{m}.$$

$$\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\cdot\frac{n-3}{4}\cdots\frac{n-(m-1)}{m}\cdot\frac{n-m}{m+1};$$

leur somme est $\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2},\frac{n-2}{3}\cdot\frac{n-3}{4}\cdots\frac{n-(m-1)}{m}\cdot\frac{n+1}{m+1}$

$$=\frac{n+1}{1}\cdot\frac{n}{2}\cdot\frac{n-1}{3}\cdot\frac{n-2}{4}\cdots\frac{n+1-m}{m+1};$$

ce qui est le nombre des manières dont peuvent être arrangées $n+1$ lettres de deux espèces, dont $m+1$ sont d'une espèce.

§ 157. Soit fait n égale aux nombres naturels successifs à commencer par l'unité; et soit fait m égale à toutes les valeurs entières depuis zéro jusqu'à n.

On obtient le tableau suivant :

1
1, 1
1, 2, 1
1, 3, 3, 1
1, 4, 6, 4, 1
1, 5, 10, 10, 5, 1
1, 6, 15, 20, 15, 6, 1
1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1
1, 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8, 1
1, 9, 36, 84, 126, 126, 84, 36, 9, 1
1, 10, 45, 120, 210, 252, 210, 120, 45, 10, 1.

Dans ce tableau, (appelé *triangle arithmétique*, de PASCAL), les colonnes verticales sont composées des nombres figurés de tous les ordres successifs, dont l'origine est successivement abaissée d'un rang; et les rangs horizontaux sont les nombres que l'on trouveroit en joignant diagonalement dans le tableau du § 149 deux nombres équidistans de l'origine, dont l'un est pris dans la première ligne horizontale, et dont l'autre est pris dans la première ligne verticale.

Seconde Partie.

Sur les Combinaisons.

On entend par *combinaisons*, suivant l'étymologie de ce mot, les manières de prendre des quantités deux à deux. Mais on a généralisé l'acception de ce mot (ainsi qu'on l'a fait dans le discours ordinaire), en l'étendant aux manières de prendre des quantités trois à trois, quatre à quatre, cinq à cinq, six à six, etc. .... Cependant, pour éviter des répétitions et des longueurs, qu'il me soit permis d'introduire les mots *ternaisons*, *quaternaisons*, *quinaisons*, pour indiquer les manières de prendre des quantités trois à trois, quatre à quatre, cinq à cinq, en général, d'exprimer par *mnaisons*, les manières de prendre des lettres m à m.

§158. Soient n lettres; on demande les combinaisons (proprement dites) auxquelles elles donnent lieu.

Une quelconque des lettres proposées peut être prise avec chacune des $n-1$ lettres restantes; ce qui donne lieu à $n(n-1)$ combinaisons de ces lettres, si on a égard à

l'ordre

l'ordre ou à l'arrangement des deux lettres qui composent chaque combinaison. Mais il se trouve toujours deux combinaisons composées des mêmes lettres; et partant, si on n'a pas égard à l'ordre dans chaque combinaison, leur nombre est la moitié du nombre précédent, ou $\frac{n(n-1)}{1.2}$.

Ce nombre est le même que celui des manières, dont peuvent être permutées n lettres, dont deux d'une espèce, et $n-2$ d'une autre espèce. Il est aisé de montrer cette correspondance comme il suit. Le nombre des manières de prendre n lettres deux à deux, est le même que le nombre des manières de prendre deux à deux n places, pour y placer les deux lettres de la première espèce.

Ce nombre est aussi le $n-1^{\text{me}}$ nombre triangulaire, et il est encore facile de montrer cette correspondance; en effet, la première lettre peut être prise avec les $n-1$ lettres restantes; la seconde lettre, ayant déjà été prise avec la première, ne peut plus être prise qu'avec les $n-2$ lettres restantes (quand on n'a pas égard à l'ordre); la troisième lettre ayant été prise avec les deux pre-

premières, ne peut plus être prise qu'avec les $n-3$ lettres restantes, et ainsi de suite, jusqu'à l'avant-dernière lettre ou $n-1^{me}$, qui doit être prise avec la dernière. Partant, le nombre des combinaisons de n lettres, en n'ayant pas égard à l'ordre, est exprimé par la somme des $n-1$ premiers nombres naturels, ou par le $n-1^{me}$ nombre triangulaire, lequel est $\frac{(n-1)n}{1.2}$.

§ 159. Soient n lettres, on demande le nombre des manières de les combiner trois à trois ou les ternaisons auxquelles elles donnent lieu.

Une quelconque des n lettres proposées peut former des ternaisons avec les combinaisons (proprement ainsi nommées) des $n-1$ lettres restantes, lequel nombre, en ayant égard à l'ordre, est $(n-1)(n-2)$; et partant, le nombre des ternaisons de n lettres, en ayant égard à l'ordre, est $n(n-1)(n-2)$. Mais, si on n'a pas égard à l'ordre, ce nombre doit être réduit à la sixième partie de lui-même; car il y a six ternaisons composées des mêmes lettres différemment arrangées. Partant, le nombre des ternaisons, en n'ayant pas égard à l'ordre, est $\frac{n.\,n-1.\,n-2}{1.\;2.\;3}$.

Ce nombre est le même que celui des manières de permuter n lettres, dont 3 d'une espèce et $n-3$ de l'autre ; ce qui se montre par le même raisonnement que pour le cas des combinaisons proprement dites.

Ce nombre est aussi le $n-2^{me}$ nombre pyramidal : on peut montrer cette correspondance à peu près de la même manière que pour le cas précédent. En effet, le nombre des ternaisons dans lesquelles entre la première lettre, est le nombre des combinaisons auxquelles donnent lieu les $n-1$ lettres restantes, lequel est $\frac{(n-1)(n-2)}{1.\ 2}$; le nombre des ternaisons dans lesquelles entre la seconde lettre sans la première, est le nombre des combinaisons des $n-2$ lettres restantes, lequel est $\frac{(n-2)(n-3)}{1.\ 2.}$; le nombre des ternaisons dans lesquelles entre la troisième lettre sans les deux premières, est le nombre des combinaisons des $n-3$ lettres restantes, lequel est $\frac{(n-3)(n-4)}{1.\ 2.}$, et ainsi de suite jusqu'à la $n-2^{me}$ lettre, qui formera une seule nouvelle ternaison avec les deux dernières lettres.

Donc le nombre des ternaisons de n lettres est la somme des n-2 premiers nombres triangulaires, ou le $n-2^{me}$ nombre pyramidal.

§ 160. On montre de la même manière, que le nombre des manières de prendre n lettres quatre à quatre, ou le nombre des quaternaisons auxquelles elles donnent lieu, est $(n-3)(n-2)(n-1)n$, en ayant égard à leur ordre et ; $\frac{(n-3)(n-2)(n-1)n}{1.\ 2.\ 3\ 4}$, en n'ayant pas égard à leur ordre. Ce nombre est le même que celui des permutations de n lettres, dont 4 d'une espèce et n-4 de l'autre ; et on montre, comme précédemment, la source de l'identité de ce nombre et du $n-3^{me}$ nombre figuré du quatrième ordre.

§ 161. Le nombre des manières de prendre n lettres m à m est $\frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}.\frac{n-3}{4}\ldots\frac{n-(m-1)}{m}$. qnand on n'a pas égard à l'ordre dans chaque manière de les prendre; et partant, le $n-(m-1)^{me}$ nombre figuré du m^{me} ordre, et il est égal au nombre des permutations de n lettres, dont m sont d'une espèce et les $n-m$ restantes d'une autre espèce.

Le procédé de la démonstration générale

de cette proposition est conforme à celui qui a été employé dans les §§ 131 et 140; savoir: que la proposition ait été démontrée vraie pour toutes les valeurs de m correspondantes à une certaine valeur de n, elle sera aussi vraie pour toutes les valeurs de m correspondantes à une valeur de n supérieure d'une unité.

Soient donc n lettres à prendre m à m. Une quelconque de ces lettres peut être prise avec les $n-1$ lettres restantes, prises $m-1$ à $m-1$; en ayant égard à l'ordre, le nombre des manières de la prendre est supposé être $(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\ldots(n-1)-(m-2)$ $=(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\ldots\ n-(m-1)$. Partant, en ayant égard à l'ordre, le nombre des manières de prendre n lettres m à m, est $n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots\ n-(m-1)$. Mais, le nombre des *mnaisons* composées des mêmes lettres, est celui des permutations des lettres qui les composent, lequel est $1.2.3\ldots m$. Partant, le nombre des mnaisons en n'ayant pas égard à l'ordre est, $\frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}.\frac{n-3}{4}\ldots\frac{n-(m-1)}{m}$

il est donc le $n-(m-1)^{me}$ nombre figuré du m^{me} ordre; il est le même que le nombre des permutations de n lettres, dont m sont d'une

espèce, et $n-m$ sont d'une autre espèce.

Corol. Le nombre des combinaisons de n lettres prises m à m, est égal à la somme des combinaisons de $n-1$ lettres prises $m-1$ à $m-1$, et m à m. En effet,

$$\frac{n-1}{1}\cdot\frac{n-2}{2}\cdots\cdots\frac{n-(m-1)}{m-1}+\frac{n-1}{1}\cdot\frac{n-2}{2}\cdots\cdots\frac{n-m}{m}$$

$$=\frac{n-1}{1}\cdot\frac{n-2}{2}\cdot\frac{n-3}{3}\cdots\cdots\frac{n-(m-1)}{m-1}\left(1+\frac{n-m}{m}\right)$$

$$=\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\cdots\cdots\frac{n-(m-1)}{m}.$$

§ 160. La doctrine des combinaisons et celle des permutations (intimément liées l'une à l'autre, de manière que l'une peut être ramenée à l'autre), est, pour la partie mathématique, le fondement de la doctrine des probabilités, si féconde en applications importantes.

Je me contenterai de proposer deux de ces applications, sans entrer dans leur développement.

Déterminer toutes les manières d'amener des points donnés avec des dés ordinaires en nombre donné. Calculer la nature de la loterie appelée *loto génois*.

Aut. appl. Connoissant les nombres pre-

miers qui sont diviseurs d'un nombre donné, on demande de déterminer tous les diviseurs du même nombre.

Soit n la multitude des nombres premiers inégaux entr'eux, diviseurs du nombre proposé.

Diviseurs du nombre proposé.

1°. L'unité.

2°. Les n nombres premiers.

3°. Les produits de ces n nombres premiers deux à deux, dont le nombre est $\frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2}$.

4°. Les produits de ces n nombres trois à trois, leur nombre est . . $\frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3}$.

5°. Leurs produits quatre à quatre . . . . leur nombre est . . $\frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdots \frac{n-3}{4}$.

6°. Leurs produits cinq à cinq . . . . . . leur nombre est . . $\frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdots \frac{n-4}{5}$.

Leurs produits en les prenant n-2 à n-2, nombre . . . . $\frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2}$.

Leurs produits en les prenant n-1 à $n-1$; nombre . . . . n.

Leur produit continuel ou le nombre lui-même . . . . 1.

Les nombres des diviseurs premiers croissant comme les nombres, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 . . . . ; les nombres des diviseurs sont, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096 . . . . .

Aut. exer. Soit une figure rectiligne d'un nombre donné de côtés. On demande le nombre des diagonales qu'on peut y mener; et le nombre des triangles, des quadrilatères, des pentagones, etc. . . qu'on peut former avec ces côtés et ces diagonales.

§ 163. La rapidité avec laquelle croissent les nombres des combinaisons auxquelles donnent lieu des quantités dont les nombres vont successivement en croissant, fait comprendre comment, avec un petit nombre d'élémens, on peut obtenir une multitude de composés. Ainsi, avec neuf ou dix caractères pris pour élémens dans l'arithmétique, on peut obtenir autant de nombres composés qu'on le veut. Ainsi, un nombre limité de lettres, suffit à toutes les modifications des différens langages. Ainsi, un petit nombre de tons élémentaires fournit à toutes les modulations de la musique; un petit nombre de couleurs fondamentales suffit à toutes les nuances que présentent les corps; et un petit nombre d'élémens

ou principes peut suffire à tous les produits si variés de la nature et de l'art.

Comme un exemple tout à la fois utile et récréatif de la multitude des composés auxquels peuvent donner lieu des principes simples et en petit nombre, on peut citer les figures différentes qu'on peut faire avec des carreaux mi-partis de deux couleurs séparées par une diagonale (1).

Il arrive souvent qu'une énumération complète de toutes les combinaisons auxquelles donnent lieu des objets proposés, deviendroit tellement longue, qu'une recherche fondée sur cette énumération absorberoit l'attention la plus forte, et épuiseroit la patience la plus exercée.

Tel est le cas du plus grand nombre des jeux de combinaisons, tels que ceux des *dames*, des *échecs*, du *trictrac*, et plusieurs des jeux de cartes, appelés jeux de société. En vain le mathématicien le plus habile voudroit-il lutter contre le joueur qui, par un long exercice, a pris ce que l'on appelle l'*esprit du jeu*.

Il est cependant des cas, dans lesquels

---

(1) Voyez les *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris* 1704.

on peut diminuer la multitude des combinaisons, par des considérations tirées des conditions particulières au cas dont on s'occupe. Ainsi, dans le § 139, nous n'avons pas fait l'énumération de toutes les manières dont les neuf premiers nombres naturels peuvent être pris trois à trois, pour obtenir celles de ces manières qui satisfont à l'arrangement demandé.

Je vais proposer, uniquement sous le point de vue d'exercices raisonnés de recherche, quelques jeux qu'on trouve dans les Ouvrages relatifs aux récréations mathématiques, mais dans lesquels on n'a pas toujours assez égard à l'utilité logique.

Un valet doit faire passer une rivière à un loup, à une chèvre et à un chou, l'un après l'autre, de manière que la chèvre ne se trouve avec le loup ou avec le chou, qu'en sa présence.

Trois maris jaloux se trouvent avec leurs trois femmes sur le bord d'une rivière, sur laquelle il y a un bateau qui ne peut pas contenir plus que deux personnes. Comment le passage peut-il se faire de manière qu'une femme ne se trouve pas avec quelqu'autre mari que le sien en l'absence de ce dernier? Item, pour un plus grand nombre de couples, et

pour une plus grande capacité du bateau.

Deux joueurs jouent chacun avec trois jetons qu'ils placent alternativement dans les cases d'un carré de trois cases de côté : celui-là a gagné qui le premier a disposé ses jetons de manière qu'ils soient sur une même rangée latérale ou diagonale. On demande si le jeu est en faveur de l'un de ces joueurs ; et s'il est déterminé en faveur de l'un d'eux, comment doit-il jouer pour profiter de son avantage?

A prend 20 cartes qu'il assemble deux à deux. B pense deux des cartes réunies. A dispose ensuite ces cartes en quatre rangs, chacun de cinq cartes. Comment A doit-il s'y prendre pour assigner les cartes pensées par B, après que celui-ci lui a dit de nouveau les rangs dans lesquels se trouvent ses deux cartes? Le même jeu pour $5 \times 6 = 30$ cartes, pour $6 \times 7 = 42$ cartes, etc.

Disposer en carré les quatre rois, les quatre dames, les quatre valets, et les quatre as d'un jeu de cartes, de manière que, dans chaque sens horizontal, vertical et diagonal, il ne se trouve pas deux cartes de même point ou de même couleur. Ce jeu peut s'étendre à un nombre impair carré $(2n+1)^2$ de quantités de $2n+1$ genres, et de $2n+1$ espèces. Mais,

je ne sais s'il peut s'étendre à un nombre pair plus grand que 16.

On a trois vases non divisés, dont les capacités sont entr'elles comme les nombres 3, 5, et 8. Ce dernier est plein, et les deux autres sont vides. On demande comment on peut obtenir, au moyen de ces trois vases, un nombre proposé de mesures, depuis l'unité jusqu'à huit. Le même jeu peut s'étendre à trois vases, dont les capacités sont entr'elles comme des nombres premiers entr'eux, et tels que la capacité de l'un est égale à la somme des capacités des deux autres.

Distribuer entre trois personnes 21 tonneaux dont 7 sont pleins, 7 sont à demi-pleins, et 7 sont vides, de manière qu'elles aient chacune le même nombre de tonneaux et la même quantité de liqueur.

A, ayant 24 jetons, en distribue 6 entre trois personnes B, C, D, de manière qu'il en donne un à B, deux à C, et trois à D; et il laisse les 18 jetons restans sur une table. Il leur dit ensuite de se distribuer à son insu trois objets, O', O'', O'''; de manière que celle qui a l'objet O' prenne autant de jetons qu'il lui en a donnés; que celle qui a l'objet O'', prenne deux fois autant de jetons

qu'il lui en a donnés; et que celle qui a l'objet O''' prenne quatre fois autant de jetons qu'il lui en a donnés. Comment, sur l'inspection des jetons restans, A peut-il déterminer la distribution de ces trois objets?

B pense un nombre non plus grand que 16. A, lui demande s'il est pair ou impair; dans le second cas, il lui fait ajouter une unité, et dans l'un et l'autre cas, il lui fait prendre la moitié; il lui fait faire la même opération sur le résultat, puis sur ce qui provient de cette seconde opération; de manière que B exécute quatre opérations successives. Au moyen des quatre réponses de B sur la parité ou l'imparité des résultats obtenus, A peut deviner le nombre pensé par B. Le même pour 5 opérations et pour un nombre non plus grand que 32; pour 6 opérations et pour un nombre non plus grand que 64, etc..... *Item*, pour le tiercement des résultats, et pour l'addition d'une ou de deux unités si ce tiercement ne peut pas s'exécuter, et pour les limites, 9, 27, 81..... des nombres pensés, pour 2, 3, 4,..... opérations successives.

A prend un jeu de 52 cartes dont il fait quatre monceaux, chacun de 13 cartes. B pense une carte, dit le monceau où elle est, et de-

mande que A la fasse venir à une place déterminée du jeu. A remet les cartes en paquet, sans séparer les cartes d'un même monceau, en fait de nouveau quatre paquets, chacun de 13 cartes, en mettant alternativement une carte sur chaque paquet ; il demande de nouveau à B le monceau dans lequel se trouve sa carte. Quel est le plus petit nombre d'opérations et de questions que A doit faire pour obtenir le but proposé, et comment doit-il s'y prendre? On peut commencer ce jeu par des nombres plus petits de cartes et de monceaux; par exemple, par trois monceaux et par trois cartes à chaque monceau.

EULER n'a pas dédaigné de s'occuper de recherches analogues aux précédentes. Dans les Mémoires de Pétersbourg, pour 1736, il traite l'exercice suivant de combinaison, sous un point de vue tant particulier que général. Une rivière se divise en deux bras, et forme une île. Chacun de ces bras continue séparément son cours, en laissant entr'eux un canal qui termine l'entourage de l'île. Sur chacun des deux premiers bras, il y a deux ponts, qui aboutissent à l'île ; il y en a un sur le canal que les deux

bras laissent entr'eux, et il y en a un sur chacun des deux bras que forme la rivière après qu'elle a quitté l'île, de manière que ces sept ponts aboutissent à quatre régions, l'île y comprise. On demande si on peut traverser tous ces ponts sans passer deux fois sur le même.

CHAPITRE XII.

Développement du théorème binomial, pour un exposant entier et positif.

§ 164. UNE *puissance* d'un nombre (en prenant ce mot dans le sens propre), est le produit de ce nombre pris un certain nombre de fois comme facteur; l'*exposant* de cette puissance est le nombre qui indique combien de fois le nombre proposé est pris comme facteur; ce nombre indique l'ordre de la puissance.

Ainsi, les produits, a, aa, aaa, $aaaa$, $aaaaa$, sont successivement les 1res, 2des, 3mes, 4mes, 5mes, puissances de a, et s'indiquent par a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, ...

En général, l'expression a^m, dans laquelle l'exposant m est un nombre entier et positif indique la m^{me} puissance de a.

Il suit immédiatement de la définition, que le produit de deux puissances d'un même nombre est une puissance de ce nombre, dont l'exposant est égal à la somme des exposans de

ces

ces deux puissances. Ainsi, $a^m \times a^n = a^{m+n}$; car, dans ce produit a est pris $m+n$ fois comme facteur.

Réciproquement, si on divise une puissance d'un nombre, par une autre puissance de ce nombre (dont l'exposant ne soit pas plus grand que l'exposant de la première), on a pour quotient une puissance du même nombre dont l'exposant est la différence des deux exposans.

On a donc $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

Ainsi, en diminuant successivement d'une unité l'exposant d'une puissance, on divise cette puissance successivement par sa racine.

En particulier $\frac{a^m}{a^m} = 1$; partant, dans l'expression $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, si $m = n$, on a $1 = a^0$. On peut donc présenter l'unité sous la forme d'une puissance à exposant o.

§ 165. Soit un binome $a+b$; soient prises les puissances successives de ce binome, en multipliant par $a+b$ la puissance obtenue pour obtenir la puissance suivante, on trouve :

$(a+b)^1=a+b$

$(a+b)^2=a^2+2ab+bb$

$(a+b)^3=a^3+3aab+3abb+b^3$

$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6aabb+4ab^3+b^4$

$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$

$(a+b)^6=a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$

$(a+b)^7=a^7+7a^6b+21a^5b^2+35a^4b^3+35a^3b^4+21a^2b^5+7ab^6+b^7$

Ces exemples suffisent pour conclure la loi que suivent les termes du développement de chaque puissance.

1°. Chaque terme est un produit ayant pour facteurs des puissances de a et de b, tels, que le nombre des dimensions de ces produits est égal à l'exposant de la puissance dont on s'occupe; ou que la somme des exposans de a et de b dans chacun de ces produits est égale à l'exposant de cette puissance.

2°. Le nombre des termes de chaque puissance est supérieur d'une unité à l'exposant de la puissance, de manière que le premier terme est la puissance de a de même exposant, et que les exposans de a dans les termes successifs vont en diminuant d'une unité jusqu'à o, tandis que ceux de b augmentent successivement d'une unité depuis le zéro jusqu'à l'exposant de la puissance dont on s'occupe.

3°. Les coefficiens sont les mêmes que les

nombres qui forment le tableau présenté dans le § 157; de manière que le coefficient de chaque terme indique le nombre des permutations d'un nombre de lettres égal à l'exposant de la puissance dont on s'occupe, et qui sont de deux espèces dont les nombres sont respectivement égaux aux exposans de ces lettres dans ce terme.

4°. Les termes également éloignés des extrêmes sont composés de la même manière, l'un en a et l'autre en b; et les coefficiens de ces termes sont aussi égaux deux à deux.

5°. Ces coefficiens vont en croissant de part et d'autre des extrêmes, jusqu'aux deux termes du milieu, si le nombre des termes est pair, ou si l'exposant de la puissance est impair, et jusqu'au terme moyen si le nombre des termes est impair, ou l'exposant de la puissance pair.

6°. Les coefficiens d'une puissance se forment des coefficiens de la puissance précédente, en ajoutant les coefficiens de deux termes dont l'un répond à la même ligne verticale, et dont l'autre précède ce dernier; ou, ce qui revient au même, à la somme de deux termes de la puissance précédente, dont l'un contient le même nombre d'a, et l'autre le même nombre de b, que le terme qui en

provient de la puissance dont on s'occupe.

Pour démontrer que cette loi a toujours lieu; il faut prouver que si elle a lieu pour quelques valeurs de n, ainsi que cela a lieu en effet pour ses premières valeurs, 1, 2, 3 . . ., elle a lieu aussi pour les valeurs suivantes. Or, cela découle immédiatement de la manière dont une puissance s'engendre de la précédente par voie de multiplication; savoir, de ce qu'elle est la somme des produits de cette puissance par a et par b successivement.

Soit supposé $(a+b)^n =$

$$a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b + \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.a^{n-2} b^2 + \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3} a^{n-3} b + \ldots .$$

Produit par a $=$

$$a^{n+1} + \frac{n}{1} a^n b + \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2} a^{n-1} b^2 + \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3} a^{n-2} b^3 + \ldots .$$

produit par b $=$

$$a^n b + \frac{n}{1} a^{n-1} b^2 + \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2} a^{n-2} b^3 + \ldots .$$

Somme, ou $(a+b)^{n+1} =$

$$a^{n+1} + \frac{n+1}{1} a^n b + \frac{n+1}{1}.\frac{n}{2} a^{n-1} b^2 + \frac{n+1}{1}.\frac{n}{2}.\frac{n-1}{3} a^{n-2} b^3 + ..$$

Dans la puissance dont l'exposant est n, que le terme $a^m b^{n-m}$ ait pour coefficient $\frac{n}{1}.\frac{n-1}{2} \ldots \frac{n-(m-1)}{m}$; et que le terme suivant $a^{m-1} b^{n-(m-1)}$ ait pour coefficient

$\frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}\ldots\frac{n-m}{m+1}$. Dans la puissance suivante dont l'exposant est $n+1$, le terme $a^{m+1}b^{n-m}$ est la somme des produits du terme $a^m b^{n-m}$ par a, et du terme $a^{m+1}b^{n-(m+1)}$ par b; donc, le coefficient du terme $a^{m+1}b^{n-m}$ dans la $n+1^{me}$ puissance, est la somme des coefficiens des deux premiers termes dans la puissance précédente. Mais, $\frac{n}{1}.\frac{n-1}{1}\ldots\frac{n-(m-1)}{m}+$

$$\frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}\ldots\frac{n-m}{m+1}=\frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}\ldots\frac{n-(m-1)}{m}\left(1+\frac{n-m}{m+1}\right)=$$

$$\frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}\ldots\frac{n-(m-1)}{m}.\frac{n+1}{m+1}=\frac{n+1}{1}.\frac{n}{2}\ldots\frac{n+1-m}{m+1}.$$

Donc, la loi ayant été démontrée vraie pour une certaine valeur de n, elle est aussi vraie pour une valeur de n supérieure d'une unité.

§ 166. Si b change de signe, et partant, si au lieu de s'occuper de la somme de deux quantités, on s'occupe de leur différence, les termes affectés des puissances impaires de b, sont précédés du signe de la soustraction ; et les termes affectés des puissances paires de b conservent le signe de l'addition. Donc, $(a-b)^n$ est l'excès de la somme des termes affectés de puissances paires de b, sur la somme des termes affectés de puissances impaires de b;

ou l'excès de la somme des termes impairs sur la somme des termes pairs. On a donc :

$$(a-b)^n = a^n - \frac{n}{1} a^{n-1} b + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} a^{n-2} b^2 \ldots \mp \frac{n}{1} ab^{n-1} \pm b^n;$$

suivant que n est paire ou impaire.

§ 167. Soit n paire ; $(a+b)^n + (a-b)^n =$

$$2\left(a^n + \frac{n}{1} \frac{n-1}{2} a^{n-2} b^2 + \frac{n}{1} \cdots \frac{n-3}{4} a^{n-4} b^4 + \cdots \frac{n}{1} \frac{n-1}{2} a^2 b^{n-2} + b^n\right)$$

$(a+b)^n - (a-b)^n =$

$$2\left(\frac{n}{1} a^{n-1} b + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} a^{n-3} b^3 + \frac{n}{1} \cdots \frac{n-4}{5} a^{n-5} b^5 + \cdots \frac{n}{1} ab^{n-1}\right)$$

Soit n impaire ; $(a+b)^n + (a-b)^n =$

$$2\left(a^n + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} a^{n-2} b^2 + \frac{n}{1} \cdots \frac{n-3}{4} a^{n-4} b^4 + \cdots \frac{n}{1} ab^{n-1}\right)$$

$(a+b)^n - (a-b)^n =$

$$2\left(\frac{n}{1} a^{n-1} b + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} a^{n-3} b^3 + \frac{n}{1} \cdots \frac{n-4}{5} a^{n-5} b^5 + \cdots b^n\right)$$

Savoir, la somme des puissances semblables de la somme et de la différence de deux quantités, est le double de la somme des termes alternatifs de cette puissance, à compter depuis le premier; et la différence de ces puissances est le double de la somme des termes alternatifs, à compter depuis le second.

§ 168. Que b soit affecté du signe de l'imaginaire $\sqrt{-1}$. Les puissances paires de b perdent ce signe, de manière que les termes qui

comprennent des puissances pairement paires de b (dont l'exposant est de la forme $4m$), sont précédés du signe de l'addition, et que les termes qui comprennent des puissances impairement paires de b (dont l'exposant est de la forme $4m+2$), sont précédés du signe de la soustraction. Les puissances impaires de b conservent le signe $\sqrt{-1}$, de manière que les termes qui comprennent des puissances de b, dont l'exposant est supérieur d'une unité à un nombre pairement pair, ou $4m+1$, sont précédés du signe de l'addition ; et les termes qui comprennent des puissances de b, dont l'exposant est inférieur d'une unité à un nombre pairement pair, ou $4m-1$, sont précédés du signe de la soustraction, on a donc :

$$(a \pm b\sqrt{-1})^n = a^n \pm \frac{n}{1} a^{n-1} b\sqrt{-1}$$

$$- \frac{n}{1} . \frac{n-1}{2} a^{n-2} b^2 \mp \frac{n}{1} . \frac{n-1}{2} . \frac{n-2}{3} a^{n-3} b^3 \sqrt{-1}$$

$$+ \frac{n}{1} \cdots \frac{n-3}{4} a^{n-4} b^4 \pm \frac{n}{1} \cdots \frac{n-4}{5} a^{n-5} b^5 \sqrt{-1}$$

$$\begin{matrix} (a+b\sqrt{-1})^n \\ +(a-b\sqrt{-1})^n \end{matrix} = 2\left(a^n - \frac{n}{1} . \frac{n-1}{2} a^{n-2} b^2 + \frac{n}{1} \cdots \frac{n-3}{4} a^{n-4} b^4 - \ldots\right)$$

$$\begin{matrix} (a+b\sqrt{-1})^n \\ -(a-b\sqrt{-1})^n \end{matrix} = 2\sqrt{-1}\left(\frac{n}{1} a^{n-1} b - \frac{n}{1} \cdots \frac{n-2}{3} a^{n-3} b^3 + \frac{n}{1} \cdots \frac{n-4}{5} a^{n-5} b^5\right)$$

§ 169. Ce qui a été démontré sur le binome $a+b$ s'applique à un trinome $a+b+c$; en décomposant ce dernier dans a et dans le binome $b+c$ pris pour un seul terme, on a donc :

$$(a+b+c)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}(b+c) + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}a^{n-2}(b+c)^2 + \dots$$

$$= a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}\left\{\begin{matrix}b\\c\end{matrix}\right. + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}a^{n-2}\left\{\begin{matrix}b^2\\2bc\\c^2\end{matrix}\right. + \dots$$

Savoir, la n^{me} puissance de $a+b+c$ est composée de tous les produits de n dimensions faits des quantités a, b, c, et de leurs puissances, et chacun de ces produits est pris un nombre de fois égal au nombre des permutations auxquelles donnent lieu les lettres qui les composent.

Il en est de même pour un polynome quelconque, ou pour une quantité composée de plusieurs parties. Une puissance quelconque d'un polynome est composée de tous les produits de n dimensions faits avec les termes de ce polynome et leurs puissances ; et le coefficient de chacun de ces produits est le nombre des permutations auxquelles donnent lieu les lettres qui le composent.

Exemp. Le carré de la somme d'un nombre quelconque de quantités est composé de

la somme de leurs carrés et de leurs doubles produits.

Le cube, ou la troisième puissance de la somme d'un nombre quelconque de quantités est composé : 1°. de la somme de leurs cubes ; 2°. de trois fois la somme des produits du carré de chacune d'elles par la somme de toutes les autres ; 3°. de six fois la somme de tous leurs produits trois à trois.

La quatrième puissance de la somme d'un nombre quelconque de quantités est composée comme il suit : 1°. de la somme de leurs quatrièmes puissances ; 2°. de quatre fois la somme des produits du cube de chacune d'elles par la somme de toutes les autres ; 3°. de six fois la somme des produits de leurs carrés deux à deux ; 4°. de douze fois la somme des produits du carré de chacune d'elles par les produits des autres deux à deux ; 5°. de 24 fois la somme de tous leurs produits quatre à quatre.

§ 170. Ce qui a été développé sur la composition des puissances, s'applique en particulier à l'élévation à une puissance dont l'exposant est donné, d'un nombre composé de deux ou de plusieurs caractères, et de là, à l'extraction des racines.

Soit un nombre composé de deux carac-

tères tel que 24 dont on doit prendre le cube. Soit décomposé ce nombre dans ses dizaines et dans ses unités; savoir, $24 = 20 + 4$. Son cube est composé, du cube des dizaines, qui est 8000; du triple produit du carré des dizaines par les unités, qui est 4800; du triple produit des dizaines par le carré des unités, qui est 960; et du cube des unités qui est 64.

$$\begin{aligned} 20^3 &= 8000 \\ 3.20^2.4 &= 4800 \\ 3.20.4^2 &= 960 \\ 4^3 &= 64 \\ \hline 24^3 &= 13824 \end{aligned}$$

De même soit $37 = 30 + 7$; on obtient :

$$\begin{aligned} 30^3 &= 27000 \\ 3.30^2.7 &= 18900 \\ 3.30.7^2 &= 4410 \\ 7^3 &= 343 \\ 37^3 &= 50653 \end{aligned}$$

On voit, par cette composition, que les derniers caractères significatifs des quatre parties dont est composé le cube d'un nombre de deux caractères, en tant qu'on le décompose dans ses dizaines et dans ses unités, sont terminés successivement d'une place plus à la gauche. Savoir le cube des unités est terminé à la place la plus à la droite, le triple produit des dizaines par le carré des unités est terminé d'une place plus à la gauche, en tant que ce produit est des dizaines; le triple produit du carré des di-

zaines par les unités est des centaines, et il est terminé à la place des centaines ; le cube des dizaines est des mille, et il est terminé à la place des mille, ou à la quatrième place en allant de la droite à la gauche.

Soit proposé le nombre 13824 dont on doit extraire la racine cubique. Comme le cube de 100 est 1000000, et que le nombre proposé a moins que sept caractères ; savoir, cinq seulement, sa racine cubique n'a que deux caractères, et le cube du caractère des dizaines est compris dans le nombre 13. Le cube le plus voisin de 13 est 8 dont la racine cubique est 2 ; donc il y a deux dizaines à la racine, ou cette racine est entre 20 et 30. Le cube de 20 est 8000 ; du nombre proposé retranchant ce cube, il reste 5824. Ce reste doit contenir entr'autres, trois fois le produit du carré des dizaines par les unités, c. à d., le produit de $3 \times 20^2 = 1200$

	13824	{ 20+4
	8000	
1200	) 5824	
	4800	
	1024	
	960	
	64	
	64	
	0	

par les unités: divisant le reste 5824 par 1200, on doit obtenir les unités pour quotient; mais ce quotient est 4; donc, le nombre des unités est 4. Le produit du triple 1200 du carré des dizaines par les unités 4, est 4800; ôtant ce produit, il reste 1024. Le triple produit des dizaines par le carré des unités est $3 \times 20 \times 16 = 960$; ôtant ce produit de 1024, il reste 64. Ce reste étant égal au cube des unités, la racine cubique cherchée est exactement 24.

On peut, ainsi que dans la division et dans l'extraction de la racine carrée, omettre les zéros des produits successifs, et ne descendre que un à un successivement les caractères du nombre proposé à côté des restes obtenus.

Exemple.

50653 { 38	50653 { 37
27	27
27) 236	27) 236
216	189
205	475
576; le nombre 8 est trop grand	441
	343
	343
	0

Dans cet exemple, ayant pris 8 pour le nombre des unités, on ne peut pas retrancher le triple produit des dizaines par le carré des unités ; ce qui apprend qu'on a pris un quotient trop grand, et qu'on doit diminuer la racine au moins d'une unité.

Soit un nombre composé de trois caractères ; pour en prendre le cube, on pourra le décomposer dans ses centaines, dans ses dizaines, et dans ses unités. Ce cube sera composé des parties suivantes : 1°. du cube des

centaines; 2°. du tri-	*Ex.* $386=300+80+6$.
ple produit du carré	$300^3=27000000$
des centaines par	$3.300^2.80=23600000$
les dizaines ; 3°. du	$3.300.\ 80^2=5760000$
triple produit des	$80^3=512000$
centaines par le carré	$3.380^2.\ 6=2599200$
des dizaines ; 4°. du	$3.380.\ 6^2=41040$
cube des dizaines ;	$6^3=216$

5°. du triple produit du carré du nombre composé des centaines et des dizaines par les unités ; 6°. du triple produit du même nombre par le carré des unités ; 7°. du cube des unités.

Il en est de même pour un nombre composé de quatre caractères ou d'un plus grand nombre.

Comme les nombres composés d'un seul caractère significatif, suivi d'un nombre quelconque de zéros, sont tels, que leurs cubes sont les cubes de ce caractère, suivis d'un nombre triple de zéros; un nombre quelconque étant proposé, on peut connoître combien sa racine cubique contient de caractères. Pour cela, soit divisé le nombre proposé en tranches de trois chiffres en allant de la droite à la gauche; le nombre de ces tranches (dont celle de la gauche peut contenir seulement un ou deux caractères) est égal au nombre des caractères de la racine.

Soit cherché le cube le plus grand, contenu dans la tranche la plus à la gauche. Soit portée sa racine à la place de la racine; soit retranché ce cube de cette tranche. A côté du reste, soit descendue la tranche suivante, en négligeant pour un moment les deux derniers caractères; soit divisé ce qui reste à la gauche par le triple du carré de la racine trouvée; soit porté le quotient à la suite de la racine, soit retranché le produit du diviseur par le quotient; soit descendu à côté du reste le caractère suivant, et soit retranché le triple produit du premier caractère par le carré du second : à côté du reste soit descendu le caractère sui-

vant, et soit retranché le cube du second caractère. Soit opéré de même sur chacune des tranches suivantes, en prenant pour diviseur le triple du carré de la partie trouvée de la racine, et en opérant sur cette partie et sur le quotient trouvé, de la même manière qu'on a opéré sur le premier et sur le second caractère.

Si l'opération se fait sans aucun reste, on trouve la racine cubique exacte du nombre proposé.

S'il y a un reste après avoir descendu la dernière tranche, on peut approcher de la racine par les fractions décimales, par exemple, en ajoutant au nombre proposé autant de tranches de trois zéros que l'on veut obtenir de caractères décimaux approximatifs.

Si dans la suite des opérations il y a quelque produit qu'on ne peut pas retrancher, on diminue le quotient correspondant d'une unité, jusqu'à ce que les soustractions successives puissent se faire.

L'extraction des racines des ordres supérieurs est fondée sur le même principe de la composition des puissances supérieures d'un binome.

Ainsi, pour la quatrième puissance, le nom-

bre des caractères de la racine est le même que le nombre des tranches de quatre caractères faites en allant de la droite à la gauche; les diviseurs successifs sont les quadruples des cubes des parties trouvées de la racine; et les produits successifs à retrancher, sont, de la première tranche à la gauche, la quatrième puissance la plus voisine; puis successivement, le quadruple du produit du cube de la première partie de la racine par le dernier caractère; le sextuple du produit du carré de cette première partie par le carré du dernier caractère; le quadruple du produit de cette première partie par le cube du dernier caractère; et enfin, la quatrième puissance du dernier caractère, conformément à la formule,

$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4.$$

Les extractions des racines des ordres supérieurs entraînent d'autant plus de longueurs, que l'exposant de la racine est plus grand; mais l'application du principe tiré de la composition des puissances, ne peut présenter aucune autre difficulté.

CHAPITRE

CHAPITRE XIII.

Sur les quantités exponentielles, et développement du théorème binomial pour un exposant quelconque.

§ 171. Nous avons vu (§ 164) que le produit de deux puissances d'un même nombre est une puissance de ce nombre dont l'exposant est égal à la somme des exposans des deux premières. De là, pour prendre le carré d'une puissance d'un nombre, il faut doubler son exposant : pour prendre le cube d'une puissance d'un nombre, il faut tripler son exposant ; et en général, pour prendre la m^{me} puissance d'une puissance d'un nombre, il faut multiplier son exposant par m ; on a donc : $(a^n)^2=a^{2n}$; $(a^n)^3=a^{3n}$; $(a^n)^4=a^{4n} \ldots (a^n)^m=a^{mn}$.

Réciproq. Pour prendre la racine carrée d'une puissance d'un nombre à exposant pair, il faut prendre la moitié de son exposant ; pour prendre la racine cubique d'une puissance d'un nombre dont l'exposant est divi-

sible par 3, il faut prendre le tiers de cet exposant; et en général, pour prendre la racine m^{me} d'une puissance d'un nombre dont l'exposant est divisible par m, il faut diviser cet exposant par m. Ainsi, $\sqrt[2]{a^{2n}}=a^n$; $\sqrt[3]{a^{3n}}=a^n$; $\sqrt[4]{a^{4n}}=a^n$; .... $\sqrt[m]{a^{mn}}=a^n$.

§ 172. Si l'exposant de a dans la puissance dont on doit extraire la racine, n'est pas divisible par le nombre qui indique l'ordre de la racine (que j'appellerai son *indice*), on ne peut pas présenter cette racine sous la forme de puissance dans le sens propre de la définition (§ 164).

Cependant, on est convenu de représenter encore cette racine sous une forme exponentielle, et de faire $\sqrt[m]{a^n}=a^{\frac{n}{m}}$, lors même que n n'est pas divisible par m. Ainsi, on a appelé les racines carrées des puissances à exposant $\frac{1}{2}$; les racines cubiques ont été appelées des puissances à exposant $\frac{1}{3}$; et en général, la racine m^{me} a été appelée puissance à exposant $\frac{1}{m}$.

Or, $a^n=\sqrt[2]{a^{2n}}=\sqrt[3]{a^{3n}}=\sqrt[4]{a^{4n}}\ldots=\sqrt[m]{a^{mn}}=a^{\frac{mn}{m}}$.

On peut donc multiplier et diviser l'exposant d'une puissance par un même nombre, sans changer la quantité exponentielle.

Soit, $\sqrt[m]{a^n} \times \sqrt[m]{a^p}$; j'affirme que ce produit est $\sqrt[m]{a^{n+p}} = a^{\frac{n+p}{m}}$.

En effet, soit $\sqrt[m]{a^n} \times \sqrt[m]{a^p} = z$;

$\sqrt[m]{a^n} = \frac{z}{\sqrt[m]{a^p}}$; $a^n = \frac{z^m}{a^p}$; $z^m = a^{n+p}$;

donc, $z = \sqrt[m]{a^{n+p}} = a^{\frac{n+p}{m}}$.

Puisque $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}} = a^{\frac{np}{mp}} = \sqrt[mp]{a^{np}}$

et $\sqrt[p]{a^n} = a^{\frac{n}{p}} = a^{\frac{mn}{mp}} = \sqrt[mp]{a^{mn}}$;

$\sqrt[m]{a^n} \times \sqrt[p]{a^n} = \sqrt[mp]{a^{np+mn}} = a^{\frac{np+mn}{mp}} = a^{\frac{n}{m}+\frac{n}{p}}$.

§ 173. En général, soient les deux puissances à exposans fractionnaires $a^{\frac{n}{m}}$ et $a^{\frac{p}{q}}$, à multiplier l'une par l'autre ; j'affirme que ce produit est $a^{\frac{n}{m}+\frac{p}{q}}$.

En effet, $a^{\frac{n}{m}} = a^{\frac{qn}{qm}}$; et $a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{mp}{mq}}$.

donc, $a^{\frac{n}{m}} \times a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[qm]{a^{qn+mp}} = a^{\frac{qn+mp}{qm}} = a^{\frac{n}{m}+\frac{p}{q}}$. (§ 172).

Partant, le produit de deux quantités exponentielles à exposans fractionnaires, a pour exposant la somme des exposans de ces deux quantités.

De là, on peut appliquer aux quantités exponentielles à exposans fractionnaires, tout ce qui a été dit (§ 171) sur les quantités exponentielles à exposans entiers, et en particulier $(a^{\frac{m}{n}})^r = a^{\frac{mr}{n}}$; et $\sqrt[r]{a^{\frac{m}{n}}} = a^{\frac{m}{nr}} = \sqrt[nr]{a^m}$.

§ 174. Nous avons vu (§ 164) que $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, aussi long-tems que m n'est pas plus petit que n. Si $m < n$; $\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}$. Partant, si on continue d'appliquer à la supposition $n > m$, la notation à laquelle a conduit la supposition $m > n$, on sera appelé à dire que $\frac{1}{a^{n-m}} = a^{m-n} = a^{-(n-m)}$; partant, on est appelé à représenter les fractions sous la forme de puissances à exposans négatifs, et à dire en général, $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$.

Cette notation a lieu quelles que soient les valeurs de n entières ou fractionnaires; de

manière que $\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = a^{-\frac{m}{n}}$. De là, on applique aux quantités exponentielles à exposans négatifs, tout ce qui a été dit sur les quantités exponentielles à exposans positifs ; de manière que $\frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^{m+n}}$ ou $a^{-m} \cdot a^{-n} = a^{-(m+n)}$;

$\frac{1}{a^m} : \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^m} \times a^n = a^{n-m}$; $(\frac{1}{a^m})^r = a^{-mr}$;

$\sqrt[r]{\frac{1}{a^m}} = a^{-\frac{m}{r}}$

Ces préliminaires sur le calcul des quantités exponentielles étant établis, je passe au développement du théorème binomial pour un exposant quelconque.

Dans le chapitre précédent la formule binomiale a été développée seulement pour le cas où l'exposant est un nombre entier et positif; et comme sa démonstration est tirée, soit de la doctrine des combinaisons, soit du passage d'une certaine valeur de l'exposant à une valeur supérieure d'une unité, elle ne sauroit s'appliquer aux cas où l'exposant n'est pas un nombre entier et positif. Cependant, cette formule étendue aux autres valeurs de l'exposant, est si importante et d'une application si fré-

quente, qu'il convient de la faire entrer dans un cours élémentaire, si cela est possible. Or, la démonstration suivante me paroît aussi simple que peut le comporter la nature de cette proposition; c'est ce qui m'engage à la répéter dans ces Élémens, telle qu'elle est contenue dans l'introduction à mon Ouvrage, intitulé: *Principiorum calculi differentialis et integralis Expositio elementaris*; *Tubingæ 1795*.

§ 175. *Lemme*. Soient deux formules conformes à la formule binomiale, sans avoir égard à la nature de l'exposant. J'affirme que leur produit est aussi une formule binomiale, et qu'on l'obtient en substituant, soit dans les coefficiens, soit dans les exposans, la somme des deux premiers exposans à l'un d'entr'eux (1).

---

(1) Depuis la publication de l'Ouvrage que je viens de citer, j'ai vu dans les Mémoires de Pétersbourg, *Novi Commentarii*, T. XIX, anno 1774), une démonstration d'EULER, fondée sur le même principe. Mais, ce mathématicien ne paroît pas avoir aperçu la facilité avec laquelle le coefficient d'un des termes du produit est déterminé par le coefficient du terme précédent. Après avoir calculé les deux coefficiens $\frac{m+n}{1}$, $\frac{m+n}{1} \cdot \frac{m+n-1}{2}$, du second et du troisième terme du produit, il s'exprime ainsi: *Si superior mul-*

Soit $M = a^{m} + \frac{m}{1} a^{m-1} b + \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} a^{m-2} b^{2} + \frac{m}{1} \cdots \frac{m-2}{3} a^{m-3} b^{3} + ..$

$$N = a^{n} + \frac{n}{1} a^{n-1} b + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} a^{n-2} b^{2} + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} a^{n-3} b^{3} + \ldots$$

Soit $m+n=s$; j'affirme que

$$MN = a^{s} + \frac{s}{1} a^{s-1} b + \frac{s}{1} \cdot \frac{s-1}{2} a^{s-2} b^{2} + \frac{s}{1} \cdot \frac{s-1}{2} \cdot \frac{s-2}{3} a^{s-3} b^{3} + \ldots\ldots$$

Dém. 1°. Le premier terme du produit est le produit des deux premiers termes de M et de N; il est donc $a^{m} \times a^{n} = a^{m+n}$.

2°. Le second terme du produit est la somme des produits du second terme de M par le premier terme de N, et du premier terme de M par le second terme de N. En omettant les coefficiens, ce terme est $a^{m+n-1} b$; et son coefficient est $\frac{m+n}{1}$.

---

tiplicatio ulteriùs continuaretur, ... calculus mox ità fieret molestus, ut maximum laborem requireret. En conséquence, il démontre le lemme énoncé d'après un principe tout différent; savoir : que la forme du produit ne dépend pas de la nature des nombres m et n; et comme elle est vraie pour les nombres entiers et positifs, il en conclut qu'elle est vraie pour toutes les valeurs de m et de n. Ce principe est vrai sans doute, mais il m'a paru difficile de l'admettre comme évident ou comme axiome dans un Ouvrage de la nature de ces Élémens.

3°. Le troisième terme du produit est la somme des trois produits suivans; du troisième terme de M par le premier terme de N; du second terme de M par le second terme de N; et du premier terme de M par le troisième terme de N. Son coefficient est:

$$\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}+\frac{m}{1}\cdot\frac{n}{1}+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}=\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}+2\cdot\frac{m}{1}\cdot\frac{n}{2}+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}$$

$$=\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}+\frac{m}{1}\cdot\frac{n}{2}$$

$$+\frac{m}{1}\cdot\frac{n}{2}+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}$$

$$=\frac{m(m+n-1)}{1.2}+\frac{n(m+n-1)}{1.2}=\frac{m+n}{1}\cdot\frac{m+n-1}{2}.$$

Troisième terme, $\frac{m+n}{1}\cdot\frac{m+n-1}{2}a^{m+n-2}b^2$.

4°. Le quatrième terme du produit est la somme des produits suivans; du quatrième terme de M par le premier terme de N; du troisième terme de M par le second de N; du second terme de M par le troisième de N; et du premier terme de M par le quatrième de N. Son coefficient est:

$$\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{n}{1}+\frac{m}{1}\cdot\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}$$

$$=\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}+3\cdot\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{n}{3}+3\cdot\frac{m}{1}\cdot\frac{n}{2}\cdot\frac{n-1}{3}+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}$$

$$=\frac{m}{1}.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}+\frac{m}{1}.\frac{m-1}{2}.\frac{n}{3}$$

$$+2.\frac{m}{1}.\frac{m-1}{2}.\frac{n}{3}+2.\frac{m}{1}.\frac{n}{2}.\frac{n-1}{3}$$

$$+\frac{m}{1}.\frac{n}{2}.\frac{n-1}{3}+\frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}$$

$$=\frac{m+n-2}{3}\left(\frac{m}{1}.\frac{m-1}{2}+2.\frac{m}{1}.\frac{n}{2}+\frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}\right)=\frac{m+n}{1}.\frac{m+n-1}{2}.\frac{m+n-2}{3}\ (3^{o})$$

Quatrième terme, $\frac{m+n}{1}\ldots\frac{m+n-2}{3}a^{m+n-3}b^{3}$.

5°. Le cinquième terme du produit est la somme des produits suivans : du cinquième terme de M par le premier de N; du quatrième terme de M par le second de N; du troisième terme de M par le troisième de N; du second terme de M par le quatrième de N; et du premier terme de M par le cinquième de N. Son coefficient est

$$\frac{m}{1}\ldots\frac{m-3}{4}+\frac{m}{1}\ldots\frac{m-2}{3}.\frac{n}{1}+\frac{m}{1}.\frac{m-1}{2}.\frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}+\frac{m}{1}.\frac{n}{1}\ldots\frac{n-2}{3}+\frac{n}{1}\ldots\frac{n-3}{4}$$

$$=\frac{m}{1}\ldots\frac{m-3}{4}+4.\frac{m}{1}\ldots\frac{m-2}{3}.\frac{n}{4}+6.\frac{m}{1}.\frac{m-1}{2}.\frac{n}{3}.\frac{n-1}{4}+4.\frac{m}{1}.\frac{n}{2}\ldots\frac{n-2}{4}+\frac{n}{1}\ldots\frac{n-3}{4}$$

$$=\frac{m}{1}\ldots\frac{m-3}{4}+\frac{m}{1}\ldots\frac{m-2}{3}.\frac{n}{4}$$

$$+3.\frac{m}{1}\ldots\frac{m-2}{3}.\frac{n}{4}+3.\frac{m}{1}.\frac{m-1}{2}.\frac{n}{3}.\frac{n-1}{4}$$

$$+3.\frac{m}{1}.\frac{m-1}{2}.\frac{n}{3}.\frac{n-1}{4}+3.\frac{m}{1}.\frac{n}{2}\ldots\frac{n-2}{4}$$

$$+\frac{m}{1}.\frac{n}{2}\ldots\frac{n-2}{4}+\frac{n}{1}\ldots\frac{n-3}{4}$$

$$=\frac{m+n-3}{4}\left(\frac{m}{1}.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}+3.\frac{m}{1}.\frac{m-1}{2}.\frac{n}{3}\quad+3.\frac{m}{1}.\frac{n}{2}.\frac{n-1}{3}+\frac{n}{1}\ldots\frac{n-2}{3}\right)$$

$$=\frac{m+n}{1}\cdot\frac{m+n-1}{2}\cdot\frac{m+n-2}{3}\cdot\frac{m+n-3}{4}\ (4^{o}.).$$

Cinquième terme, $\frac{m+n}{1}\ldots\frac{m+n-3}{4}a^{m+n-4}b^4$.

6°. On montre, précisément de la même manière, que le coefficient du sixième terme est le produit du coefficient du cinquième terme par $\frac{m+n-4}{5}$; et partant, que le sixième terme du produit est $\frac{m+n}{1}\ldots\frac{m+n-4}{5}a^{m+n-5}b^5$.

7°. De même, le coefficient du septième terme est le produit du coefficient du sixième terme par $\frac{m+n-5}{6}$; et partant, le septième terme est $\frac{m+n}{1}\ldots\frac{m+n-5}{6}a^{m+n-6}b^6$.

En général, on prouve, de la même manière, que la proposition étant vraie pour un certain terme du produit, elle est vraie pour le terme suivant. Or, elle a été démontrée vraie pour les premiers termes; donc, elle est vraie pour tous les termes successivement.

Corol. Le produit continuel de trois formules binomiales, est une formule binomiale,

qu'on obtient en substituant à l'un de ces exposans leur somme, soit dans les coefficiens, soit dans les exposans; et en général, la même substitution a lieu pour obtenir le produit continuel d'un nombre quelconque de formules binomiales.

§ 176. *Appl.* Le carré d'une formule binomiale se forme en subtituant à l'exposant son double, soit dans les coefficiens, soit dans les exposans de chaque terme.

Le cube d'une formule binomiale se forme en substituant à l'exposant son triple, soit dans les coefficiens, soit dans les exposans de chaque terme.

En général, soit r un nombre entier et positif; la r^{me} puissance d'une formule binomiale se forme en substituant à l'exposant son produit par r, soit dans les coefficiens, soit dans les exposans de chaque terme.

§ 177. *Récip.* La racine r^{me} (r étant un nombre entier et positif) d'une formule binomiale, se forme, en substituant à l'exposant dans cette formule son quotient par r, soit dans les coefficiens, soit dans les exposans de chaque terme.

En effet, la puissance r^{me} de la quantité

provenue de cette substitution, est la formule binomiale proposée.

§ 178. Soient m et n des nombres entiers; j'affirme que $\sqrt[n]{(a+b)^m}$ peut se développer en une formule binomiale dont $\frac{m}{n}$ est l'exposant.

En effet, dans la formule binomiale $(a+b)^m$ (§ 176) soit substitué à l'exposant m son quotient par n; on aura la racine n^{me} de cette formule ou $(a+b)^{\frac{m}{n}}$ (§ 177).

§ 179. Dans les formules M et N du § 175 soit $n = -m$; ou $m+n=0$; $MN=1$.

En effet, le premier terme a^{m+n} devient $a^0=1$; et tous les termes qui suivent le premier évanouissent, puisque leurs coefficiens ont pour facteur $m+n=0$.

Corol. Dans la supposition $m+n=0$, $N=\frac{1}{M}$; mais, $M=(a+b)^m$ pour une valeur quelconque positive de m (§ 178).

Donc, $N=\frac{1}{(a+b)^m}=(a+b)^{-m}$.

Donc aussi, $(a+b)^{-m}=$

$$a^{-m}-\frac{m}{1}a^{-m-1}b+\frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2}a^{-m-2}b^2-\frac{m}{1}\cdots\frac{m+2}{3}a^{-m-3}b^3+\ldots$$

§ 180. On peut appliquer aux puissances quelconques d'un binome les conséquences qui

ont été tirées du cas où l'exposant est entier et positif dans les §§ 166—168.

Lorsque l'exposant est un nombre entier et positif, le développement de la puissance est composé d'un nombre fini de termes, dont le premier et le dernier sont les puissances des deux termes du binome dont l'exposant est le même que le premier. Dans ce cas, il est indifférent de commencer par l'un ou par l'autre de ces deux termes, pourvu qu'on prenne tous les termes qui composent la puissance.

Il n'en est pas de même lorsque l'exposant n'est pas un nombre entier et positif. En effet, les exposans du premier terme a diminuant successivement d'une unité, les exposans des termes qui suivent le premier, sont les différences d'un nombre ou fractionnaire quelconque ou entier négatif et d'un nombre entier positif; partant, ces exposans ne sont jamais zéro, et il en est de même des coefficiens; donc, la formule n'est pas terminée.

Dans ces cas, pour que la formule développée converge vers la valeur du binome à développer, de manière qu'elle en approche d'autant plus qu'on en prend un plus grand nombre de termes, il faut que le second

terme ne soit pas plus grand que le premier; et la convergence est d'autant plus rapide, que le second terme du binome est plus petit, relativement au premier.

Exemple. Qu'on veuille extraire la racine carrée de 2, et pour cela qu'on fasse $2=1+1$; et $\sqrt{2}=(1+1)^{\frac{1}{2}}$. On obtient par la formule binomiale, et en réduisant chaque terme
$\sqrt{2}=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{5}{128}+\frac{7}{256}-\frac{21}{1024}+\ldots$
Cette suite converge lentement vers la valeur de $\sqrt{2}$. Mais, si on décompose 2 dans les deux parties $\frac{49}{25}$ et $\frac{1}{25}$; et si on extrait la racine carrée de $(\frac{49}{25}+\frac{1}{25})$ par la formule binomiale en faisant $a=\frac{49}{25}$, $b=\frac{1}{25}$, $n=\frac{1}{2}$; on trouve $\sqrt{2}=\frac{7}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{35}-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{35.49}+\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{35.49^2}-\ldots$
On obtiendroit une formule beaucoup plus convergente, en faisant $2=\frac{289}{144}-\frac{1}{144}=\frac{289}{144}(1-\frac{1}{289})$; de là $\sqrt{2}=\frac{17}{12}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12\cdot 17}-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{12\cdot 17^3}-\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{12\cdot 17^5}-\ldots$

Après avoir décomposé 2 dans les deux fractions $\frac{49}{25}$ et $\frac{1}{25}$; si on développe $(\frac{1}{25}+\frac{49}{25})^{\frac{1}{2}}$, en regardant $\frac{1}{25}$ comme étant le premier terme, on obtient pour ce développement
$\frac{1}{5}(1+\frac{1}{2}.49-\frac{1}{8}.49^3+\frac{1}{16}.49^5-\ldots)$ suite qui s'éloigne de $\sqrt{2}$ très rapidement, et d'autant

plus qu'on en prend un peu grand nombre de termes.

De même, si on décompose 2 dans les deux parties égales 1 et 1; et si on développe la fraction $\frac{1}{1+1}$ conformément à la formule binomiale, en faisant $a=1$, $b=1$, $n=-1$; on trouve $\frac{1}{1+1}=1-1+1-1+1-1+\ldots$ La somme de cette suite est l'unité ou zéro, suivant qu'on prend un nombre impair ou un nombre pair de ses termes; et partant, elle s'éloigne toujours d'une même quantité, alternativement en plus et en moins, de la valeur de la fraction proposée.

Soit fait $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$; et soit décomposé 4 dans les deux parties 3 et 1, on obtient:

$$\tfrac{1}{2}=\frac{2}{3+1}=2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{3^4}+\frac{1}{3^5}-\ldots\right);$$

suite convergente vers la fraction $\frac{1}{2}$. Mais, si on développe la fraction $\frac{1}{2}$ en la présentant sous la forme $\frac{2}{1+3}$, on a pour développement $2(1-3+3^2-3^3+3^4-\ldots\ldots)$; suite qui s'éloigne de la fraction proposée, soit par excès, soit par défaut, d'autant plus qu'on prend un plus grand nombre de ses termes.

De même, soit $2=3-1$;

$\frac{1}{2}=\frac{1}{3-1}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}+\ldots\ldots$, suite promptement convergente vers $\frac{1}{2}$. Mais le développement en suite de l'expression $\frac{1}{-1+3}$ donne $-(1+3+3^2+3^3+3^4+\ldots\ldots)$; suite de laquelle on ne peut rien conclure sur la valeur de la fraction proposée, et qui en diverge rapidement.

Pour le présent, je n'insiste pas davantage sur ce sujet auquel nous serons appelés à revenir dans la suite.

§ 181. Pour appliquer la formule générale du théorème binomial à un binome $a \pm b\sqrt{-1}$, composé d'une partie réelle a et d'une partie imaginaire $b\sqrt{-1}$, il faut se rappeler ce qui a été exposé dans le § 168. On obtient,

$$
\begin{aligned}
(a \pm b\sqrt{-1})^n = \quad & a^n & & \pm \frac{n}{1} a^{n-1} b\sqrt{-1} \\
& -\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2} a^{n-2} b^2 & & \mp \frac{n}{1}\ldots\frac{n-2}{3} a^{n-3} b^3 \sqrt{-1} \\
& +\frac{n}{1}\ldots\frac{n-3}{4} a^{n-4} b^4 & & \pm \frac{n}{1}\ldots\frac{n-4}{5} a^{n-5} b^5 \sqrt{-1} \\
& -\frac{n}{1}\ldots\frac{n-5}{6} a^{n-6} b^6 & & \mp \frac{n}{1}\ldots\frac{n-6}{7} a^{n-7} b^7 \sqrt{-1} \\
& +\ldots\ldots\ldots & & \pm \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Soit

Soit A l'assemblage des termes impairs du binome $(a+b)^n$, alternativement précédés des signes de l'addition et de la soustraction; et soit B l'assemblage des termes pairs de ce binome aussi alternativement précédés de ces signes, on a $(a \pm b\sqrt{-1})^n = A \pm B\sqrt{-1}$.

Comme la formule binomiale a été démontrée vraie pour un exposant quelconque, entier ou fractionnaire, positif ou négatif, on obtient la proposition générale suivante. Une puissance quelconque à exposant entier ou fractionnaire, positif ou négatif, d'un binome $a \pm b\sqrt{-1}$, composé d'une partie réelle a, et d'une partie imaginaire $b\sqrt{-1}$, est une formule de la même forme $A \pm B\sqrt{-1}$, dont la partie imaginaire est affectée seulement du signe imaginaire $\sqrt{-1}$.

§ 182. Cependant, cette conclusion ne doit pas s'étendre au de là de la supposition suivant laquelle le binome proposé est en partie réel et en partie imaginaire; et en particulier, elle ne peut pas être étendue au cas où $a=0$. On ne peut donc rien conclure sur la valeur de $(b\sqrt{-1})^n$ en particulier, pour les cas où n n'est pas un nombre entier et positif.

On pourroit être tenté d'appliquer à ces

cas la formule précédente, en faisant $b\sqrt{-1}=a-(a-b\sqrt{-1})$; et partant,

$$(b\sqrt{-1})^n = a^n - \frac{n}{1}a^{n-1}(a-b\sqrt{-1}) + \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}a^{n-2}(a-b\sqrt{-1})^2 - \ldots$$

Mais, comme cette suite est interrompue, seulement lorsque n est un nombre entier et positif, elle conduit à une quantité composée des puissances de b et de $\sqrt{-1}$ sans mélange de a, seulement lorsque n est un nombre entier et positif, et on ne peut tirer aucune conséquence pour les autres valeurs de n qui seules font le sujet de la difficulté.

Puisque $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$, il suffit de montrer que $\sqrt[n]{-1}$ est de la forme $a+b\sqrt{-1}$, lorsque n est un nombre entier. Comme $\sqrt[n]{-1}=-1$, lorsque n est un nombre impair, il suffit de montrer la proposition pour les valeurs paires de n. Enfin, comme $\sqrt[mn]{a}=\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$, il suffit de s'occuper des cas où n est quelque puissance de 2.

§ 183. *Théor.* J'affirme que $\sqrt[4]{-1}$ peut être ramenée à la forme $a+b\sqrt{-1}$. Pour cela, soit fait $a+b\sqrt{-1}=\sqrt[4]{-1}$; soit élevé chaque membre au carré, on a $aa-bb+2ab\sqrt{-1}=\sqrt{-1}$.

Comme le premier membre de cette équation contient la partie réelle $aa-bb$, tandis que l'autre membre n'en contient point, cette partie réelle doit évanouir, et partant, $aa=bb$, et $a=b$. Donc aussi $2ab\sqrt{-1}=\sqrt{-1}$, et $2ab=1$; de là, $a=\frac{1}{\sqrt{2}}=b$. Donc $\sqrt[4]{-1}=\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$.

En effet, $\left(\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{2\sqrt{-1}}{2}=\sqrt{-1}$, et $\left(\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\right)=-1$.

Rem. De l'équation $bb=aa$, on tire $b=\pm a$, et de l'équation $2aa=1$, on tire $a=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$; de là, $\sqrt[4]{-1}$ a les quatre valeurs suivantes $\pm\frac{1\pm\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$.

§ 184. *Théor.* Soit un binome $a+b\sqrt{-1}$ composé de la partie réelle a et de la partie imaginaire $b\sqrt{-1}$; j'affirme que sa racine carrée est un binome de la même forme $x+y\sqrt{-1}$.

Soit fait $x+y\sqrt{-1}=\sqrt{(a+b\sqrt{-1})}$; $xx-yy+2xy\sqrt{-1}=a+b\sqrt{-1}$; de là, $xx-yy=a$; $2xy=b$; donc (§ 92)

$$x=\sqrt{\frac{\sqrt{(aa+bb)}+a}{2}},\ y=\sqrt{\frac{\sqrt{(aa+bb)}-a}{2}},$$

et $x+y\sqrt{-1}=\sqrt{\frac{\sqrt{(aa+bb)}+a}{2}}+\sqrt{\frac{\sqrt{(aa+bb)}-a}{2}}\sqrt{-1}$.

En effet, $(x+y\sqrt{-1})^2=$

$$\frac{\sqrt{(aa+bb)}+a}{2}-\frac{\sqrt{(aa+bb)}-a}{2}+2\sqrt{\frac{bb}{4}}.\sqrt{-1}=a+b\sqrt{-1}.$$

§ 185. *Corol.* Puisque $\sqrt[4]{-1}$ est de la forme $a+b\sqrt{-1}$; aussi, $\sqrt[8]{-1}$ $(=\sqrt{\sqrt[4]{-1}})$ est de la même forme. De là $\sqrt[16]{-1}=\sqrt{\sqrt[8]{-1}}$ est de la même forme : et par les mêmes raisonnemens successifs $\sqrt[32]{-1}$, $\sqrt[64]{-1}$, ... $\sqrt[2^n]{-1}$, sont de la même forme.

Donc, en général, les racines de tous les ordres de -1 dont les indices sont des puissances de 2 à exposans entiers et positifs, se ramènent à la forme $a+b\sqrt{-1}$, dont la partie imaginaire est affectée seulement de la partie imaginaire $\sqrt{-1}$.

§ 186. J'ai dit (§ 181), que, lorsque n est un nombre impair, $\sqrt[n]{-1}$ est la quantité réelle -1. Cette dernière quantité n'est pas la seule dont la n^{me} puissance est -1; ou $\sqrt[n]{-1}$ n'a pas la valeur unique -1.

Exemp. 1°. On trouve que $\sqrt[3]{-1}$ outre la valeur -1, a encore les deux valeurs ima-

ginaires $\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$; 2°. $\sqrt[5]{-1}$ outre la valeur -1 a encore les quatre valeurs imaginaires :

$$\frac{\sqrt{5}+1}{4}\pm\frac{\sqrt{(10-2\sqrt{5})}}{4}\sqrt{-1},\ \frac{-\sqrt{5}-1}{4}\pm\frac{\sqrt{(10+2\sqrt{5})}}{4}\sqrt{-1}.$$

En conséquence, lorsque n est un nombre impair, on est appelé à rechercher s'il peut entrer dans les valeurs de $\sqrt[n]{-1}$ différentes de -1 d'autres expressions imaginaires que $\sqrt{-1}$.

Or, ces autres valeurs de $\sqrt[n]{-1}$, en tant qu'elles contiennent de l'imaginaire, ne peuvent pas être affectées du même signe $\sqrt[n]{-1}$. En effet, si elles en étoient affectées, en substituant à $\sqrt[n]{-1}$ sa valeur réelle -1, elles cesseroient d'être imaginaires à cet égard. Donc, les valeurs de $\sqrt[n]{-1}$, en tant qu'elles sont imaginaires, ne peuvent être affectées que du signe $\sqrt[2^n]{-1}$, lequel se réduit à $a+b\sqrt{-1}$.

§ 187. *Conclusion générale.* Toute quantité imaginaire dépend uniquement de $\sqrt{-1}$, quelle que soit sa complication avant qu'elle ait été ramenée à la forme $a+b\sqrt{-1}$.

Exemp. 1°. Pour ramener $(a+b\sqrt[n]{-1})^m$ à $A+B\sqrt{-1}$; soit présenté $\sqrt[n]{-1}$ sous la forme $p+q\sqrt{-1}$; soit fait $a+bp=\alpha$, $bq=\beta$; on aura $(\alpha+\beta\sqrt{-1})^n=A+B\sqrt{-1}$.

2°. Soit la formule $\frac{1}{(a+b\sqrt[n]{-1})^m}$; soit fait $a+b\sqrt[n]{-1}=p+q\sqrt{-1}$; et partant, $\frac{1}{a+b\sqrt[n]{-1}}=\frac{1}{p+q\sqrt{-1}}=\frac{p-q\sqrt{-1}}{pp+qq}$, on aura $\frac{1}{(a+b\sqrt[n]{-1})^m}=\frac{(p-q\sqrt{-1})^m}{(pp+qq)^m}=A+B\sqrt{-1}$.

3°. Soit $(a+b\sqrt[n]{-1})^m\times(\alpha+\beta\sqrt[n]{-1})^r$. Soit ramenée chacune des formules $(a+b\sqrt[n]{-1})^m$ et $(\alpha+\beta\sqrt[n]{-1})^r$ aux formes $A+B\sqrt{-1}$ et $A'+B'\sqrt{-1}$; leur produit $AA'-BB'+(AB'+A'B)\sqrt{-1}$ n'est plus affecté que du signe $\sqrt{-1}$, et il est de la forme $a+b\sqrt{-1}$.

Scholie. Quant à la valeur finale $a+b\sqrt{-1}$ d'une quantité imaginaire composée, ce n'est pas ici le lieu de l'exposer ; elle exige le plus souvent les ressources que fournit la trigonométrie analytique.

§ 188. *Théor.* Soit R une quantité réelle, ayant pour facteur le binome imaginaire $a+b\sqrt{-1}$; j'affirme que cette quantité réelle

a aussi pour facteur le binome imaginaire $a-b\sqrt{-1}$, qui diffère du précédent, seulement par le signe de l'imaginaire $b\sqrt{-1}$.

Soit $\frac{R}{a+b\sqrt{-1}} = p+q\sqrt{-1}$;

$R=ap-bq+(aq+bp)\sqrt{-1}$. Puisque R est réel, la partie imaginaire $(aq+bp)\sqrt{-1}$ évanouit, et $aq+bp=0$; donc, $R=ap-bq-(aq+bp)\sqrt{-1}$. Mais, $ap-bq-(aq+bp)\sqrt{-1}=(a-b\sqrt{-1})(p-q\sqrt{-1})$; donc, $R=(a-b\sqrt{-1})(p-q\sqrt{-1})$; et partant $\frac{R}{a-b\sqrt{-1}}=p-q\sqrt{-1}$

Corol. Puisque la quantité réelle R, si elle est divisible par l'une des deux quantités imaginaires $a\pm b\sqrt{-1}$ est aussi divisible par l'autre; elle est divisible par leur produit $aa+bb$ qui est réel. Partant, les facteurs imaginaires d'une quantité réelle se combinent deux à deux, de manière à produire des facteurs réels qui sont la somme de deux carrés.

Ex. $x^4+1=(x+\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}})(x-\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}})(x+\frac{1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}})(x-\frac{1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}})$.

Or, $(x+\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}})(x+\frac{1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}})=xx+\frac{2x}{\sqrt{2}}+1=(x+\frac{1}{\sqrt{2}})^2+(\frac{1}{\sqrt{2}})^2$

et $(x-\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}})(x-\frac{1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}})=xx-\frac{2x}{\sqrt{2}}+1=(x-\frac{1}{\sqrt{2}})^2+(\frac{1}{\sqrt{2}})^2$

donc, $x^4+1=(xx+\frac{2x}{\sqrt{2}}+1)(xx-\frac{2x}{\sqrt{2}}+1)$.

Scholie. Le développement complet de ce sujet exige les ressources de la trigonométrie analytique.

§ 189. Puisque $(a \pm b\sqrt{-1})^n = A \pm B\sqrt{-1}$ (§ 184); $(a+b\sqrt{-1})^n + (a-b\sqrt{-1})^n = 2A$; et $\frac{(a+b\sqrt{-1})^n - (a-b\sqrt{-1})^n}{\sqrt{-1}} = 2B$; partant, cette somme et cette différence sont réelles, quel que soit l'exposant n.

Les quantités A et B étant déterminées par le développement de la somme et de la différence des puissances $(a+b\sqrt{-1})^n$ et $(a-\sqrt{b-1})^n$; ces quantités A et B sont exprimées en un nombre fini de termes provenant de ce développement, seulement lorsque n est un nombre entier et positif.

Cependant, il est quelques autres cas où l'on peut obtenir exactement les valeurs de cette différence, ou les valeurs de A et de B.

1°. Cela a lieu lorsque n est un nombre entier négatif; savoir :

$$\frac{1}{(a-b\sqrt{-1})^n} \pm \frac{1}{(a+b\sqrt{-1})^n} = \frac{(a+b\sqrt{-1})^n \pm (a-b\sqrt{-1})^n}{(aa+bb)^n};$$

partant, la somme $\frac{1}{(a+b\sqrt{-1})^n} + \frac{1}{(a-b\sqrt{-1})^n}$,

et la différence $\frac{1}{\sqrt{-1}}\left(\frac{1}{(a-b\sqrt{-1})^n} - \frac{1}{(a+b\sqrt{-1})^n}\right)$,

sont des quantité réelles, exprimées en termes finis, lorsque n est un nombre entier.

2°. Je dis que cela a encore lieu lorsque n est un nombre fractionnaire dont le dénominateur est une puissance entière de 2.

1er. *Ex.* Soit $\sqrt{(a+b\sqrt{-1})}+\sqrt{(a-b\sqrt{-1})}=z$; prenant les carrés de part et d'autre, on obtient $2a+2\sqrt{(aa+bb)}=zz$; et $z=\sqrt{2a+2\sqrt{(aa+bb)}}$.

Soit $a=1$, $b=\sqrt{3}$; on a $\sqrt{(1+\sqrt{-3})}+\sqrt{(1-\sqrt{-3})}=\sqrt{6}$.

De même, soit $\sqrt{(a+b\sqrt{-1})}-\sqrt{(a-b\sqrt{-1})}=z\sqrt{-1}$; on a $2a-2\sqrt{(aa+bb)}=-zz$; $zz=2\sqrt{(aa+bb)}-2a$; $z=\sqrt{2\sqrt{(aa+bb)}-2a}$. Ainsi, $\dfrac{\sqrt{(1+\sqrt{-3})}-\sqrt{(1-\sqrt{-3})}}{\sqrt{-1}}=\sqrt{2}$.

2d. *Ex.* Soit $\sqrt[4]{(a+b\sqrt{-1})}+\sqrt[4]{(a-b\sqrt{-1})}=z$; de là, en prenant les carrés,

$\sqrt{(a+b\sqrt{-1})}+\sqrt{(a-b\sqrt{-1})}+2\sqrt[4]{(aa+bb)}=zz$.

Mais, (1er. exemp.) $\sqrt{(a+b\sqrt{-1})}+\sqrt{(a-b\sqrt{-1})}$ est la quantité réelle $\sqrt{2\sqrt{(aa+bb)}+2a}$; donc aussi la somme proposée est une quantité réelle exprimée en un nombre fini de termes.

3me. Soit $\sqrt[8]{(a+b\sqrt{-1})}+\sqrt[8]{(a-b\sqrt{-1})}=z$, soient pris les carrés,

$\sqrt[4]{(a+b\sqrt{-1})}+2\sqrt[8]{(aa+bb)}+\sqrt[4]{(a-b\sqrt{-1})}=zz$;

Mais, (2d. exemp.) $\sqrt[4]{(a+b\sqrt{-1})}+\sqrt[4]{(a-b\sqrt{-1})}$

a une valeur réelle en termes finis ; donc aussi, la somme proposée a une valeur réelle en un nombre fini de termes.

On passe de même successivement de l'indice 2^3 à l'indice 2^4; de là à l'indice 2^5, puis à l'indice 2^6, et en général à l'indice 2^n.

On montre de même que la différence

$$\frac{\sqrt[n]{(a+b\sqrt{-1})}-\sqrt[n]{(a-b\sqrt{-1})}}{\sqrt{-1}}$$ a une valeur réelle en termes finis, lorsque n est une puissance de 2 à exposant entier.

CHAPITRE XIV.

Sur les suites aux différences constantes.

§ 190. SOIT une suite de quantités p, p', p'', $p''', p^{\text{IV}}, p^{\text{V}} \ldots\ldots p^{\text{N-I}}, p^{\text{N}}$, que nous regarderons, par exemple, comme croissantes.

Soient prises les différences de deux termes successifs de cette suite, $p'-p, p''-p', p'''-p''$, $p^{\text{IV}}-p''', p^{\text{V}}-p^{\text{IV}} \ldots\ldots p^{\text{N}}-p^{\text{N-I}}$. Ces différences sont appelées *différences premières*. Une suite dont les différences premières sont constantes est appelée *suite du premier ordre*; telle est la suite des nombres naturels, et en général une suite arithmétique quelconque.

§ 191. Soient prises les différences des termes qui composent la suite des différences premières, ces différences sont appelées *différences secondes*, relativement aux termes de la première suite; elles sont successivement $p''-2p'+p, p'''-2p''+p', p^{\text{IV}}-2p'''+p'', p^{\text{V}}-2p^{\text{IV}}+p''' \ldots p^{\text{N}}-2p^{\text{N-I}}+p^{\text{N-II}}$.
Les coefficiens des trois termes dont chaque différence seconde est composée sont 1, 2, 1,

les mêmes que ceux des termes du carré du binome. Les suites dont les différences secondes sont constantes, sont appelées *suites du second ordre* ; telle est la suite des nombres triangulaires, celle des nombres carrés, celle des nombres polygones, la suite des carrés des termes d'une progression arithmétique, et celle des produits des termes correspondans de deux progressions arithmétiques.

§ 192. Soient prises de nouveau les différences de deux termes successifs de la suite des différences secondes. Ces différences sont appelées *différences troisièmes*, relativement aux termes de la première suite; elles sont successivement, $p''' - 3p'' + 3p' - p$, $p^{\text{IV}} - 3p''' + 3p'' - p'$, $p^{\text{V}} - 3p^{\text{IV}} + 3p''' - p''$ ...... $p^{\text{N}} - 3p^{\text{N-I}} + 3p^{\text{N-II}} - p^{\text{N-III}}$. Les coefficiens des quatre termes dont chaque différence troisième est composée, sont les mêmes que les coefficiens des termes du cube du binome, 1, 3, 3, 1. Les suites dont les différences troisièmes sont constantes, sont appelées *suites du troisième ordre*; telles sont les suites des nombres pyramidaux, la suite des nombres cubes, la suite des produits des termes correspondans de trois progressions arithmétiques.

§ 193. Soient prises de nouveau les différences de deux termes successifs de la suite des différences troisièmes. Ces différences sont appelées *différences quatrièmes*, relativement aux termes de la première suite. Elles sont successivement, $p^{\text{IV}}-4p'''+6p''-4p'+p$, $p^{\text{V}}-4p^{\text{IV}}+6p'''-4p''+p'$ .. $p^{\text{N}}-4p^{\text{N-I}}+6p^{\text{N-II}}-4p^{\text{N-III}}+p^{\text{N-IV}}$.

Les coefficiens des cinq termes dont chaque différence quatrième est composée, sont les coefficiens de la quatrième puissance du binome 1, 4, 6, 4, 1. Les suites dont les différences quatrièmes sont constantes, sont appelées *suites du quatrième ordre.* Tels sont les nombres figurés du quatrième ordre, telle est la suite des quatrièmes puissances des nombres naturels; telle est la suite des produits continuels des termes correspondans de quatre progressions arithmétiques.

§ 194. Les différences des différences quatrièmes forment la suite des différences cinquièmes; les différences des différences cinquièmes, forment la suite des différences sixièmes, et ainsi de suite; de manière que les différences des différences m^{mes} forment la suite des différences $m+1^{\text{mes}}$.

L'expression des différences m^{mes}, est

$$P^{M} - mP^{M-I} + \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} P^{M-II} \cdots \mp \frac{m}{1} P' \pm P.$$

Les suites dont les différences m^{mes} sont constantes, sont appelées *suites du m^{me} ordre*. Tels sont les nombres figurés du m^{me} ordre; les puissances m^{mes} des nombres naturels, ou des termes d'une progression arithmétique quelconque; les produits continuels des termes correspondans de m progressions arithmétiques, etc.

§ 195. De même qu'on peut descendre par soustraction d'une suite proposée aux suites successives des différences de ses termes; on peut aussi remonter par addition d'une suite de différences, aux suites précédentes des différences; et en particulier à la suite originaire de laquelle ces suites successives ont tiré leur origine. Il faut remarquer à cet égard, que comme le premier terme de la suite m^{me} des différences, est la différence des deux premiers termes de la suite $m-1^{me}$; le premier terme de la suite m^{me} étant donné, le premier terme de la suite $m-1^{me}$ peut être pris à volonté.

Que la suite m^{me} des différences soit composée de termes constans, d; soit a le pre-

mier terme de la suite $m-1^{me}$; cette suite sera la suite arithmétique $a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ \ldots\ldots a+(n-1)d$.

Soit a' le premier terme de la suite $m-2^{me}$ des différences, cette suite sera $a',\ a'+d$,

$$a'+2a+d,\ a'+3a+3d,\ a'+4a+6d \ldots a'+(n-1)a+\frac{(n-2)(n-1)}{1.2}d.$$

Soit a'' le premier terme de la suite $m-3^{me}$ des différences, cette suite sera $a'',\ a''+a'$, $a''+2a'+a,\ a''+3a'+3a+d,\ a''+4a'+6a+4d..$ dont le terme général est :

$$a''+(n-1)a'+\frac{n-2}{1}.\frac{n-1}{2}a+\frac{n-3}{1}.\frac{n-2}{2}.\frac{n-1}{3}d.$$

De même, soit a''' le premier terme de la suite $m-4^{me}$ des différences ; son terme général, qui est le terme sommatoire de la suite $m-3^{me}$ des différences, est :

$$a'''+(n-1)a''+\frac{n-2}{1}.\frac{n-1}{2}a'+\frac{n-3}{1}\cdots\frac{n-1}{3}a+\frac{n-4}{1}\cdots\frac{n-1}{4}d.$$

En général, désignant par a^{IV}, a^{V}, les premiers termes des suites des différences, en remontant successivement ; on obtient pour le terme général de ces suites :

$$a^{IV}+\frac{n-1}{1}a'''+\frac{n-2}{1}.\frac{n-1}{2}a''+\frac{n-3}{1}\ldots\frac{n-1}{3}a+\frac{n-4}{1}\ldots\frac{n-1}{4}d.$$

$$a^{V}+\frac{n-1}{1}a^{IV}+\frac{n-2}{1}.\frac{n-1}{2}a'''+\frac{n-3}{1}..\frac{n-1}{3}a''+\frac{n-4}{1}..\frac{n-1}{4}a+\frac{n-5}{1}..\frac{n-1}{5}d;$$

et ainsi de suite.

Ex. 1er. Soient les nombres carrés,	1,	4,	9,	16,	25...
Différences premières, ...		3,	5,	7,	9
Différences secondes, ...			2,	2,	2,....

Expression générale des nombres carrés : $1+3(n-1)+2\dfrac{(n-2)(n-1)}{1.2}$; de là, l'expression générale de la somme des nombres carrés est : $n+3.\dfrac{n-1}{1}.\dfrac{n}{2}+2\dfrac{n-2}{1}.\dfrac{n-1}{2}.\dfrac{n}{3}$.

Ex. 2^{d}. Soient les nomb. cubes,	1,	8,	27,	64,	125,....
Différences premières, . . .		7,	19,	37,	61,....
Différences secondes, . . .			12,	18,	24,....
Différences troisièmes, . . .				6,	6,....

Expression du n^{me} nombre cube,

$$1+7\frac{n-1}{1}+12.\frac{n-2}{1}.\frac{n-1}{2}+6.\frac{n-3}{1}.\frac{n-2}{2}.\frac{n-1}{3}.$$

De là, expression générale de la somme des nombres cubes :

$$n+7.\frac{n-1}{1}.\frac{n}{2}+12.\frac{n-2}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n}{3}+6.\frac{n-3}{1}\ldots\frac{n}{4}.$$

Ex. 3me. Soient les quatrièmes puissances des nombres naturels,

	1,	16,	81,	256,	625,	1296, . . .
Différences 1res.		15,	65,	175,	369,	671, . . .
Différences 2des.			50,	110,	194,	302, . . .
Différences 3mes.				60,	84,	108, . . .
Différences 4mes.					24,	24, . . .

De

De là, $\overset{4}{n} = 1 + 15(n-1) + 50.\frac{n-2}{1}.\frac{n-1}{2} + 60.\frac{n-3}{1}\ldots\frac{n-1}{3} + 24.\frac{n-4}{1}\ldots\frac{n-1}{4}$

Delà, $S.\overset{4}{n} = n + 15.\frac{n-1}{1}.\frac{n}{2} + 50.\frac{n-2}{1}\ldots\frac{n}{3} + 60.\frac{n-3}{1}\ldots\frac{n}{4} + 24.\frac{n-4}{1}\ldots\frac{n}{5}$.

Comme la doctrine des suites des différens ordres joue un grand rôle dans les parties supérieures des mathématiques, j'ai cru devoir en exposer les premiers principes dans ces Elémens, en montrant sa liaison avec les nombres figurés, ou avec les coefficiens du binome; mais la destination de cet Ouvrage ne me permet pas de prolonger ce sujet. Voyez, par exemple, le calcul différentiel d'EULER, celui de LA CROIX, le bel Ouvrage de M[r]. le Professeur BERTRAND, intitulé: *Développement de la Partie élémentaire des Mathématiques*; et mon *Expositio*, etc.

CHAPITRE XV.



Sur les Progressions géométriques et sur les Logarithmes.

§ 196. *Définition.* SOIT une suite de quantités, telles, que le rapport de deux qui se suivent est toujours le même : cette suite est appelée une *progression géométrique*, ou par équi-quotient.

Ainsi, soit une suite de quantités, telles, que le premier terme est l'unité, que le second est une quantité quelconque, et que les termes suivans sont des puissances du second terme, dont les exposans augmentent successivement d'une unité ; cette suite est une progression géométrique.

Symboliq. La suite $1, a, a^2, a^3 \ldots a^{n-2}, a^{n-1}$, est une progression géométrique, dont le n^{me} terme est la $n-1^{me}$ puissance de a ou du second terme. La suite

$a, b, \frac{b^2}{a}, \frac{b^3}{a^2}, \frac{b^4}{a^3} \ldots \frac{b^{n-1}}{a^{n-2}}$, est aussi une pro-

gression géométrique. Cette progression peut toujours être ramenée à la première, en la présentant sous la forme $a(1, \frac{b}{a}, \frac{b^2}{a^2}, \frac{b^3}{a^3} \ldots \frac{b^{n-1}}{a^{n-1}})$.

La facilité de cette réduction peut nous engager à nous occuper principalement des progressions de la première forme.

§ 197. On peut présenter le premier terme 1 sous la forme exponentielle a^0 (§ 164) ; on peut aussi prolonger la progression a^0, a^1, a^2, a^3 .... a^{n-1} de l'autre côté du premier terme : on obtient $\frac{1}{a^{n-1}}, \frac{1}{a^{n-2}}, \frac{1}{a^{n-3}} \ldots \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a}$ ou, $a^{-(n-1)}$, $a^{-(n-2)}$, $a^{-(n-3)}$ ..... a^{-2}, a^{-1}. Si a est plus grand que l'unité, les termes de la progression, en allant de la gauche à la droite depuis l'unité, vont successivement en augmentant, la *progression* est appelée *croissante*; au contraire, les termes situés à la gauche de l'unité vont successivement en diminuant, ou la *progression* à cet égard est *décroissante*. Si a est plus petit que l'unité, la progression est décroissante en allant de la gauche à la droite, et elle est croissante en allant de la droite à la gauche.

§ 198. Soit une progression géométrique

commençante par l'unité, ou dont tous les termes sont des puissances du second. Pour prendre le produit de deux termes de cette progression, on doit ajouter leurs exposans (§ 164) : savoir, $a^m \times a^n = a^{m+n}$. Pour prendre le carré d'un terme de cette progression, on doit doubler son exposant; pour prendre le cube d'un terme, on doit tripler son exposant; pour prendre la quatrième puissance d'un terme, on doit quadrupler son exposant : et, en général, pour élever un terme à la m^{me} puissance, on doit multiplier son exposant par m.

On a $(a^n)^2 = a^{2n}$, $(a^n)^3 = a^{3n}$; $(a^n)^4 = a^{4n}$, ... $(a^n)^m = a^{mn}$.

Pour diviser l'un par l'autre deux termes de cette progression, on doit prendre la différence de leurs exposans; savoir : $a^n : a^m = a^{n-m}$. Le quotient a^{n-m} est une puissance du second terme à exposant positif, si $n > m$; il est l'unité ou a^0 si $n = m$; il est une fraction ou une puissance du second terme à exposant négatif si $n < m$.

Pour prendre la racine carrée d'un terme, on doit prendre la moitié de son exposant; pour prendre la racine cubique d'un terme, on doit prendre le tiers de son exposant;

pour prendre la racine quatrième, on doit prendre le quart de l'exposant; et, en général, pour prendre la racine m^{me} d'un terme, on doit diviser son exposant par m. On a donc :

$$\sqrt{a^n}=a^{\frac{1}{2}n};\ \sqrt[3]{a^n}=a^{\frac{1}{3}n};\ \sqrt[4]{a^n}=a^{\frac{1}{4}n};\ \sqrt[m]{a^n}=a^{\frac{n}{m}}.$$

§ 199. L'exposant d'un terme indique le nombre des rapports égaux à celui de l'unité au second terme dont est composé le rapport de l'unité à ce terme. Ainsi, le rapport de 1 à a^2, composé des rapports de 1 à a et de a à a^2 est composé de deux rapports égaux à celui de 1 à a; le rapport de 1 à a^3 composé des rapports de 1 à a, de a à a^2, de a^2 à a^3, est composé de trois rapports égaux à celui de 1 à a; en général, le rapport de 1 à a^m est composé de m rapports égaux à celui de 1 à a. L'exposant d'un terme est la mesure du nombre des rapports égaux entr'eux, et égaux à celui de l'unité au second terme, dont est composé le rapport de l'unité à ce terme. De là, il est appelé le *logarithme* de ce rapport, et, pour abréger, il est appelé le logarithme de ce terme.

§ 200. Si on avoit une progression géométrique dans laquelle tous les nombres naturels entrassent comme puissances du second

terme : on pourroit convertir les multiplications et les divisions à faire sur les termes de cette progression, en additions et en soustractions exécutées sur les exposans. On convertiroit l'élévation d'un de ses termes à une puissance, en multiplication de son exposant par celui de la puissance ; et on convertiroit l'extraction de la racine d'un ordre proposé d'un de ses termes, en division de son exposant par l'indice de la racine.

Si on prenoit pour second terme le nombre 10, la progression seroit composée seulement de 10 et de ses puissances, et son usage seroit très limité.

Mais si on conçoit une progression dans laquelle le nombre 10 soit à une très grande distance du second terme, par exemple, à la 10 000 000me place, de manière que a étant le second terme, on ait $10 = a^{10\,000\,000}$; le terme a devroit être extrêmement petit, la progression croîtroit très lentement, et on trouveroit dans cette progression, au moins très sensiblement, les nombres naturels intermédiaires entre 1 et 10, parmi les termes intermédiaires entre le premier et le 10 000 000me. Le nombre 100 seroit le 20 000 000me terme de cette progression ; ou $100 = a^{20\,000\,000}$, et

les nombres naturels intermédiaires entre 10 et 100 se trouveroient très sensiblement parmi les termes intermédiaires entre le 10000000me et le 20000000me terme de la progression. On trouveroit de même très sensiblement les nombres naturels intermédiaires entre 100 et 1000 parmi les termes de la progression intermédiaires entre le 20000000me et le 30000000me, et ainsi de suite.

§ 201. On a, en effet, exécuté ces calculs (nous développerons dans la suite un des moyens par lesquels on peut les exécuter); on a trouvé, par exemple, que dans la progression dont 10 est le 10000000me terme, les nombres 3010300, 4771213, 6020600, expriment sensiblement les places dans lesquelles se trouvent les nombres 2, 3, 4, respectivement.

On a rédigé en tables les nombres obtenus, et elles ont été appelées *Tables logarithmiques*. Leur disposition varie, et c'est surtout par l'usage qu'on peut s'exercer à leur emploi. Dans le plus grand nombre des tables récemment publiées, une page fournit immédiatement les logarithmes de 500 nombres naturels successifs, par la division de cette page en dix colonnes, dont chacune contient les logarithmes de 50 nombres.

Au lieu de regarder le nombre 10, par exemple, comme étant le 10000000me terme après le premier, ou comme ayant pour logarithme 10000000, on est convenu de faire son logarithme égal à l'unité; et de là les logarithmes de 100, 1000, 10000, 100000, sont respectivement 2, 3, 4, 5. Les logarithmes des nombres intermédiaires entre 10 et 100 sont plus grands que 1, mais plus petits que 2; ils sont l'unité plus une fraction qu'on a réduite en décimales. Les logarithmes des nombres intermédiaires entre 100 et 1000 sont plus grands que 2, et plus petits que 3; les logarithmes des nombres intermédiaires entre 1000 et 10000 sont plus grands que 3 et plus petits que 4. En un mot, le logarithme d'un nombre, suivant la supposition que le logarithme de 10 est 1, est 10000000 de fois aussi petit que suivant la supposition que ce logarithme est 10000000. Les logarithmes des nombres plus grands que 10, sont donc composés d'un nombre entier, égal au nombre des caractères dont ce nombre est composé après le premier, et d'une partie fractionnaire. Ce nombre entier, en tant qu'il fournit un caractère d'après lequel on peut juger par approximation la grandeur du nombre qui répond au loga-

rithme, est appelé *caractéristique*; la partie fractionnaire qui le suit est appelée la *mantisse*. Les logarithmes des nombres compris entre l'unité et 10 ont zéro pour caractéristique. Dans le plus grand nombre des tables on omet la caractéristique, soit à cause de la facilité avec laquelle on peut la suppléer, soit parce que les nombres qui ne diffèrent les uns des autres que parce qu'ils sont 10 fois, 100 fois, 1000 fois, ... aussi petits les uns que les autres, ont des logarithmes composés de la même mantisse, et différens seulement par la caractéristique.

Savoir, pour multiplier un nombre par 10, 100, 1000, ... il faut ajouter à la caractéristique de son logarithme, une, deux, trois... unités; et réciproquement, pour diviser un nombre par une puissance de 10, il faut ôter à sa caractéristique un nombre d'unités égal à l'exposant de cette puissance.

Pour éviter les caractéristiques négatives des quantités fractionnaires, quelques calculateurs augmentent leur caractéristique de dix unités, de sorte que la caractéristique négative étant $-1, -2, -3, -4, \ldots$ la caractéristique positive, deviendra $+9, +8, +7, +6 \ldots\ldots$ Ainsi, log. $\frac{1}{2}(=0{,}5) = -1{,}6989700 = 9{,}6989700$;

log. 0,05 = −2,6989700 = 8,6989700. Pour éviter la confusion à laquelle ce changement peut donner lieu, il convient de l'indiquer par quelque signe. On pourroit, par exemple, faire précéder la caractéristique du signe +, ou plutôt on pourroit indiquer la soustraction à faire de 10 à chaque logarithme ainsi changé. Je dirois donc : log. 0,5 = 9,6989700(−10), log. 0,05 = 8,6989700(−10).

Par la disposition du plus grand nombre des tables récemment publiées, on peut avoir immédiatement les logarithmes des 100 000 premiers nombres naturels ; puis au moyen des petites tables, appelées tables proportionnelles, qu'on trouve à chaque page à côté des tables principales, on peut obtenir les logarithmes des nombres jusqu'à 10 000 000.

L'usage des tables proportionnelles est fondé sur la propriété suivante des logarithmes. Quand les nombres sont un peu grands, et en particulier supérieurs à 100 000, les logarithmes des nombres naturels successifs croissent aussi sensiblement en progression arithmétique. On peut vérifier ce principe par les tables, et nous le démontrerons d'après le calcul des logarithmes.

Ce principe admis, qu'on veuille obtenir

le logarithme d'un nombre composé de six caractères, en connoissant les logarithmes des nombres composés de cinq caractères. Soit prise la différence des logarithmes de deux nombres successifs composés de cinq caractères, entre lesquels, quand ils sont multipliés par 10, est situé le nombre proposé : au plus petit de ces logarithmes, soit ajoutée la dixième partie de cette différence répétée autant de fois que le dernier caractère du nombre proposé contient d'unités. Les tables proportionnelles offrent ce petit calcul tout fait, en présentant les neuf premiers multiples de la dixième partie de la différence de deux logarithmes voisins. Si on propose un nombre composé de sept caractères, on aura le logarithme de ce nombre, en ajoutant au logarithme du nombre composé de six caractères, la dixième partie de ce qu'on auroit pris pour le septième caractère s'il avoit été à la sixième place.

Ex. On demande le log. de		5648654.
Mantisse du log. de	56486...	7519408.
Diff. pour 5, dans les petites tables		38
$\frac{1}{10}$ différence pour 4 . . .		5.
Mantisse du log. de	5648654....	7519449
Logarithme de	5648654=6,7519449.	

Récip. Un logarithme étant proposé, on

détermine le nombre auquel il répond : comme cette détermination ne présente aucune difficulté lorsque le logarithme proposé se trouve immédiatement dans les tables : je vais prendre un exemple du cas contraire.

Mantisse du log. proposé . . . 5684968.
Log. tab. immédiatement plus petit, 5684951.
Nombre correspondant, 37025.
Différence de ces deux log. . . . 27.
Diff. la plus voisine dans les petites tables, 24.
Nombre correspondant, 2.
Diff. de ces deux différences . . . 3.
Nombre correspondant, 3.

Nombre cherché 3702523, si la caractéristique est 6 ; sinon, on met parmi les décimales autant de caractères que la caractéristique a d'unités au-dessous de 6.

Je le répète : c'est par un exercice réitéré qu'on se familiarise avec l'usage des tables ; il seroit inutile de proposer ici un grand nombre d'exemples. Je passe aux applications.

Exemple de multiplication.

Multiplicande 784. Log. 784=2,8943161
Multiplicateur 968. log. 968=2,9858754
log. pr. =5,8801915
log. voisin= 8801903=log. 75891
Diff. = 12
Diff. corresp. des nombres = 2
produit 758912.

Exemple de division.

Dividende 227 628 ; log. 227 628=5,357 2257
Diviseur 672, log. 672=2,827 3693
log. quotient =2,529 8564
quotient = 338,732.

Exemples relatifs aux fractions.

Mult^{de}. $\frac{5}{8}$. log. 5=0,698 9700
Mult^{r}. $\frac{7}{12}$ log. 8=0,903 0900
log. $\frac{5}{8}$=-1,795 8800=9,795 8800(—10)
log. $\frac{7}{12}$=-1,765 9168=9,765 9168(—10)
log.pr.=-1,561 7968=9,561 7968(—10)
pr. = 0,364 5833
Div^{de}. $3\frac{3}{4}=\frac{15}{4}$; log. $\frac{15}{4}$= 0,574 0313
Div^{r}. $\frac{7}{8}$ log. $\frac{8}{7}$= 0,057 9920
log. quot. = 0,632 0233
quot. = 4,285 715

Exemples relatifs aux extractions de racines.

Log. 2=0,301 0300 log. 5=0,698 9700
Log. $\sqrt{2}$=0,150 5150 log. $\sqrt[3]{5}$=0,232 9900
$\sqrt{2}$=1,414 214 - $\sqrt[3]{5}$=1, 709 976

Je passe à quelques problèmes relatifs aux intérêts composés.

§ 202. Une personne qui possède 20 000 frs. les fait valoir pendant 18 ans, au 5%, en intérêt composé (c'est-à-dire, de manière que l'intérêt est ajouté, chaque année, au capital pour produire intérêt). Quel sera son capital au bout de 18 ans ?

Le capital augmente chaque année de $\frac{5}{100}$ de lui-même, ou il devient à la fin de chaque année les $\frac{105}{100}$ de ce qu'il étoit au commencement de cette année; ainsi, au bout de deux ans il est devenu les $\frac{105}{100}$ des $\frac{105}{100}$ ou $(\frac{105}{100})^2$ de ce qu'il étoit au commencement de la première année: et les années croissant comme les nombres 3, 4, 5...., son capital au bout de ce tems sera devenu $(\frac{105}{100})^3$, $(\frac{105}{100})^4$, $(\frac{105}{100})^5$..... de ce qu'il étoit au commencement de la première année; et en particulier, le capital 20000 frs. sera devenu au bout de 18 ans, $20000 \times (\frac{105}{100})^{18}$.

Log. $\frac{105}{100} = 0{,}0211893$
Log. $(\frac{105}{100})^{18} = 0{,}3813074$
Log. $20000 = 4{,}3010300$
Log. $20000(\frac{105}{100})^{18} = 4{,}6823374$; $20000(\frac{105}{100})^{18} = 48121{,}3$

En général, soit s le premier capital, r le taux de l'intérêt, et partant, $\frac{100+r}{100}$ le taux de la fructification ou le rapport du capital à la fin d'une année à ce capital au commencement de cette année; soit n le nombre des années: on demande la valeur de $(\frac{100+r}{100})^n$.

Aut. exerc. La population d'un Etat augmente de $\frac{1}{100}$ par année, sa population ac-

tuelle est de 200000 ames : quelle sera sa population dans 100 ans ? On demande la valeur de $200000 \times (\frac{101}{100})^{100}$.

On vend un cheval sous la condition qu'on paie un sou pour le premier clou, 2 pour le second, 4 pour le troisième, en doublant toujours le prix pour un clou, afin d'obtenir celui du clou suivant : on demande le nombre correspondant au 32me clou, ou la valeur de 2^{31}.

§ 203. Une personne doit un capital de 100000 frs. payables dans 20 ans sans intérêt. Par quel capital peut-elle acquitter cette dette présentement, en comptant l'intérêt au 6%?

Une personne qui possède présentement un capital s, et qui le fait valoir au 6%, possède au bout de 20 ans $s(\frac{106}{100})^{20}$: donc, réciproquement, la valeur présente d'un capital payable dans 20 ans est les $(\frac{100}{106})^{20}$ de ce capital, et en particulier la valeur présente de 100000 f. payables dans 20 ans, est

$$100000 \times (\frac{100}{106})^{20} = 100000 \times \frac{1}{(\frac{106}{100})^{20}}.$$

Log. $\frac{106}{100} = 0{,}0253059$

Log. $(\frac{106}{100})^{20} = 0{,}5061180$

Log. $100000 = 5{,}0000000$

Log. $100000 \times \frac{1}{(\frac{106}{100})^{20}} = 4{,}4938820 =$ log. $31180{,}4$.

On peut donc escompter pour 31180 £ 8 s. un capital de 100000 frs. payable dans 20 ans.

En général, soit c le capital dû au bout d'un nombre donné n d'années sans intérêt; et soit r le taux de l'intérêt : on demande la valeur présente de ce capital.

La population d'un Etat augmente chaque année de $\frac{1}{40}$; sa population actuelle étant de 8000000 d'âmes, quelle étoit sa population il y a un siècle?

§ 204. Une personne qui doit un capital de 20122 frs. payables dans 12 ans sans intérêt, offre 10000 frs. pour acquitter sa dette présentement : on demande le taux auquel elle compte l'intérêt.

Soit r le taux de l'intérêt, et partant $\frac{100+r}{100}$ le taux de la fructification, on doit avoir l'équation $10000\left(\frac{100+r}{100}\right)^{12}=20122$; donc,

$$\left(\frac{100+r}{100}\right)^{12}=2{,}0122;\quad \frac{100+r}{100}=\sqrt[12]{2{,}0122}.$$

Log. $2{,}0122=0{,}3036711$

Log. $\sqrt[12]{2{,}0122}=0{,}0253059=$ log. 106. Partant, le taux cherché de l'intérêt, est 6%.

En général, soit s un capital, et c sa valeur

leur au bout d'un certain nombre n d'années; on a l'équation $s \times \left(\frac{100+r}{100}\right)^n = c$; et $\left(\frac{100+r}{100}\right)^n = \frac{c}{s}$.

La population d'un Etat a doublé au bout de 25 ans: quelle étoit l'augmentation annuelle?

La population d'un Etat a triplé au bout de 40 ans: quelle étoit l'augmentation annuelle?

Six personnes seulement capables de repeupler la terre ayant survécu au déluge, dans quel rapport se faisoit la fécondation de la terre, si au bout de 600 ans elle a contenu 600000 habitans?

§ 205. Une personne fait valoir un capital en intérêt composé au 5%: au bout de combien d'années sera-t-il doublé?

Soit n le nombre cherché d'années: on doit résoudre l'équation $(\frac{105}{100})^n = 2$, $n \log. \frac{105}{100} = \log. 2$.

$$n = \frac{\log.\ 2}{\log.\ 105 - \log.\ 100} = \frac{3\,010\,300}{211\,893} = 14 +$$

Aut. exerc. Au bout de combien d'années un capital sera-t-il triplé, quadruplé, etc.?

Généralement, r étant le taux de l'intérêt, et s un capital, au bout de combien d'années ce capital sera-t-il devenu c? Dans

l'équation $s\times(\frac{100+r}{100})^n=c$, on trouve

$$n=\frac{\log. c-\log. s}{\log. (100+r)-\log. 100}.$$

Connoissant l'augmentation annuelle de la population d'un Etat, on demande au bout de combien d'années la population de cet Etat aura augmenté dans un rapport donné.

Un vase plein de vin contient 100 mesures. On en tire une mesure qu'on remplace par une mesure d'eau; on tire une mesure du mélange qu'on remplace par une mesure d'eau, et ainsi de suite. On demande le nombre des extractions et des remplacemens successifs que l'on doit faire, pour que le mélange soit composé de parties égales de vin et d'eau; et plus généralement pour que le vin soit une partie déterminée du mélange.

Connoissant le rapport des capacités du corps de pompe et du récipient d'une machine pneumatique, on demande combien on doit donner de coups de piston pour obtenir une raréfaction donnée de l'air dans le récipient.

Rem. Lorsqu'on place un capital en intérêt composé à un taux donné, ce capital va continuellement en augmentant, et en

particulier il ne peut jamais se convertir en une dette. L'équation $s \times (\frac{100+r}{100})^n = -c$, est donc absurde, et la valeur de n est impossible. Or, cette équation résolue par les logarithmes, donne $n = \frac{\log. -c - \log. s}{\log. (100+r) - \log. 100}$; donc, cette dernière expression est impossible. Mais, cette impossibilité ne peut pas provenir des logarithmes de s, de $100+r$ et de 100, donc, elle ne peut provenir que de $\log. -c$. L'introduction du logarithme d'une quantité négative indique donc (au moins dans ce cas) l'impossibilité de la question, et elle doit nous faire présumer que le logarithme d'une quantité négative est impossible (c'est ce que nous examinerons plus particulièrement dans la suite).

§ 206. *Prob.* Une personne est intéressée dans deux commerces : dans l'un, pour une somme de 100000 frs., sur laquelle elle gagne 15 %; dans l'autre, pour une somme de 120000 frs., sur laquelle elle gagne 12 % : on demande au bout de combien d'années elle possèdera dans ces deux commerces des capitaux égaux.

Dén. Soit n le nombre cherché d'années.

Le capital placé dans le premier commerce

sera devenu au bout de ce tems $100000(\frac{115}{100})^n$; et le capital placé dans le second commerce sera devenu au bout de ce tems $120000(\frac{112}{100})^n$.

Cond. $100000 \times (\frac{115}{100})^n = 120000 \times (\frac{112}{100})^n$.

Réd. $(\frac{115}{112})^n = 1,2$.

Partant, quoique cette question paroisse plus compliquée que celles du § 205, elle est exactement de la même nature qu'elles, puisqu'on demande quelle est la puissance à laquelle on doit élever le nombre donné $\frac{115}{112}$ pour obtenir 1,2.

En général, soit s le premier capital, r le taux de son intérêt, s' un autre capital, et r' le taux de son intérêt : on doit avoir l'équation $s \times (\frac{100+r}{100})^n = s' \times (\frac{100+r'}{100})^n$; partant,

$$(\frac{100+r}{100+r'})^n = \frac{s'}{s}.$$

Aut. exer. La population d'un Etat qui comprend 2000000 d'âmes, augmente de $\frac{1}{100}$ par année. La population d'un autre Etat qui comprend 1500000 âmes augmente de $\frac{1}{80}$ par année : au bout de combien d'années ces deux Etats seront-ils également peuplés ?

La population d'un Etat qui comprend 5000000 d'habitans, augmente par année

de $\frac{1}{60}$. La population d'un autre Etat qui comprend 6000000 d'âmes diminue par année de $\frac{1}{80}$: au bout de combien d'années ces deux Etats seront-ils également peuplés ?

Si, à la notation décimale, on substituoit la notation duodécimale, on demande le nombre qui, suivant la première notation, seroit exprimé par un caractère de plus que suivant la seconde. Eq. $12^n = 10^{n+1}$.

En général, on demande des puissances égales de deux nombres donnés, dont la différence des exposans est donnée.

§ 207. *Prob.* Une personne possède un capital de 12000 frs., qu'elle fait valoir à intérêt composé au 6 % par année. Une autre personne qui possède un capital de 11800 frs., le fait valoir à $\frac{1}{2}$ % par mois, aussi à intérêt composé : on demande le tems au bout duquel ces deux capitaux seront égaux.

Soit n le nombre cherché d'années, et partant, $12n$ le nombre cherché de mois : on doit avoir $12000 \times (\frac{106}{100})^n = 11800 \times (\frac{201}{200})^{12n}$; ou, $60(\frac{106}{100})^n = 59(\frac{201}{200})^{12n}$;

$n \log. \frac{106}{100} + \log. 60 = 12n \log. \frac{201}{200} + \log. 59$.

Donc, $n = \dfrac{\log. 60 - \log. 59}{12 \log. \frac{201}{200} - \log. \frac{106}{100}} = \dfrac{0{,}0072993}{0{,}0006873} = \begin{matrix} 10+ \\ 11- \end{matrix}$

Rem. $(\frac{201}{200})^{12}=1,0616$. Partant, lorsqu'on fait valoir un capital de 10000 frs. à $\frac{1}{2}$ pour cent par mois, on retire au bout de l'année 616 frs. d'intérêt, au lieu de 600 qu'on auroit retirés si on avoit fait valoir ce capital à 6 pour cent par année ?

Un usurier fait valoir un capital de 10 000 frs. à $\frac{1}{2}$pour cent par semaine : au bout de combien d'années sera-t-il d'un dixième plus riche que s'il avoit fait valoir ce même capital à 6 pour cent par année ?

Item. Un usurier fait valoir un capital de 10000 frs. à $\frac{1}{10}$ pour cent par jour. Quel est le tems au bout duquel il sera deux fois aussi riche que s'il avoit fait valoir ce capital au 10 pour cent par année.

§ 208. Au moyen des logarithmes, on peut souvent approcher de se former une idée du résultat d'un calcul, qu'il seroit trop long d'exécuter pour obtenir ce résultat exact.

Ex. 1er. On demande de se former une idée de la 64me puissance de 2, ou de 2^{64}. on a, $\log. 2=0,3010300$; de là, $\log. 2^{64}=19,2659200$.

Partant, le nombre cherché est composé de 20 caractères dont les sept premiers sont 18446745.

De même, on demande de se former une

idée approchée de la 50me puissance de 3, ou de la 40me puissance de 4.

Exemp. 2^{d}. Si on fait valoir un capital de 100000 f., en intérêt composé au 5 pour cent, on demande ce qu'il sera devenu au bout de 1000 ans : on demande la valeur approchée de $100000\left(\frac{105}{100}\right)^{1000}$.

$$\text{Log.}\ \frac{105}{100} = 0,0211893$$
$$\text{Log.}\ \left(\frac{105}{100}\right)^{1000} = 21,1893000$$
$$\text{Log.}\ 100000\left(\frac{105}{100}\right)^{1000} = 26,1893000.$$

Le nombre correspondant est composé de 27 caractères, il est plus grand que $1\,546\,322 \times 10^{20}$. Sa grandeur, vers laquelle je ne crois pas que tous les trésors réunis des puissances de la terre puissent approcher, est un exemple de l'opposition qui peut avoir lieu entre les résultats des abstractions purement mathématiques, et les applications ou la possibilité physique de ces résultats. On peut appliquer la même réflexion aux suppositions admissibles sur l'augmentation de la population, sur la loi de la diminution des germes dans le système de l'emboîtement, etc.

Soit une suite de quantités exponentielles, telles, que leurs exposans suivent une progression géométrique ; cette suite est appelée

hypergéométrique. Pour peu que la base de ces quantités exponentielles surpasse l'unité, les termes de cette suite vont en croissant très rapidement.

Exemp. Soit la suite 2, 4, 16, 256, 65536...., telle que chaque terme est le carré de celui qui le précède : on demande de se former une idée approchée de la grandeur du onzième terme de cette suite. : ce onzième terme est $2^{2^{10}}$. Or, $2^{10}=1024$; donc, ce onzième terme est 2^{1024} son logarithme est $1024 \times \log. 2 = 308,2547200$, ce nombre est composé de 309 caractères. La progression croîtroit avec bien plus de rapidité, si chaque terme étoit le cube ou une puissance plus élevée du terme précédent, et si le premier terme étoit plus grand que deux.

CHAPITRE XVI.

Sur la sommation des progressions géométriques.

§ 209. SOIT une progression géométrique dont le premier terme est l'unité; dont le second terme est a, et dont le nombre des termes est n. Soit s la somme cherchée des termes de cette progression, de manière que $s=1+a+a^2+a^3+a^4+\ldots+a^{n-1}$: on a aussi $as= a+a^2+a^3+a^4+\ldots+a^{n-1}+a^n$, en multipliant par a les deux membres de la première équation.

1er. *Cas.* Soit $a>1$; des membres de la seconde équation, soient retranchés les membres de la première, on obtient $as-s=a^n-1$, et $s=\frac{a^n-1}{a-1}$. Savoir, du terme qui suivroit le dernier soit retranché le premier, et soit divisé le reste par la différence des deux premiers termes; le quotient est la somme de la progression.

On demontre synthétiquement la formule précédente, en prouvant que si elle est vraie pour une certaine valeur de n, elle est vraie pour une valeur supérieure d'une unité. En effet, $\frac{a^n-1}{a-1}+a^n=\frac{a^n-1}{a-1}+\frac{a^{n+1}-a^n}{a-1}=\frac{a^{n+1}-1}{a-1}$.

Ex. Valeurs de a; 2 3 4 5,....

Valeurs de s; 2^n-1, $\frac{3^n-1}{2}$, $\frac{4^n-1}{3}$, $\frac{5^n-1}{4}$.....

2d. *Cas.* Soit $a<1$; des membres de la première équation soient retranchés les membres de la seconde; on obtient $s-as=1-a^n$; et $s=\frac{1-a^n}{1-a}$. Du premier terme, soit retranché le terme qui suivroit le dernier, et soit divisé le reste par la différence des deux premiers termes : le quotient est la somme de la progression.

Rem. 1re. Les formules relatives aux deux suppositions $a>1$ et $a<1$, diffèrent l'une de l'autre, seulement par les signes des termes des fractions qui les expriment.

Rem. 2de. Lorque $a<1$, les deux quantités a^n et $\frac{a^n}{1-a}$ vont continuellement en dimi-

nuant par l'augmentation de n, et chacune d'elles peut être rendue plus petite qu'aucune quantité assignée. Partant, la somme de la progression toujours plus petite que $\frac{1}{1-a}$ peut en différer moins que d'aucune quantité assignée; et partant $\frac{1}{1-a}$ est la limite de la somme de la progression décroissante, $1+a+a^2+\ldots+a^{n-1}$. *Ex.* Soit :

$$a = \tfrac{1}{2}, \quad \tfrac{1}{3}, \quad \tfrac{2}{3} \quad \tfrac{3}{4}\ldots$$
$$s = 2-(\tfrac{1}{2})^{n-1}, \tfrac{3}{2}-\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{3})^{n-1}, 3-2(\tfrac{2}{3})^{n-1}, 4-3(\tfrac{3}{4})^{n-1}$$
$$\text{Lim.}\, s = \quad 2, \quad 1\tfrac{1}{2}, \quad 3, \quad 4\ldots$$

3me. *Cas.* Soit $a=1$; les équations $s(a-1)=-1+a^n$, et $s(1-a)=1-a^n$, paroissent devenir $0\times s=0$; et $s=\frac{0}{0}$, expression de laquelle on ne peut rien conclure. Cependant, dans ce cas $s=n$, puisque tous les termes de la progression sont égaux à l'unité; il faut donc rechercher comment les formules de l'un ou l'autre des deux premiers cas peuvent s'appliquer à ce troisième cas.

Soit, par exemple, la formule du premier cas, $s=\frac{a^n-1}{a-1}$, de laquelle on doit tirer la valeur de s relative au cas $a=1$.

Puisque a est supposé plus grand que 1, soit $a=1+z$, et $a-1=z$.

$$a^n = 1+\frac{n}{1}z+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}z^2+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}z^3+\frac{n}{1}\cdots\frac{n-3}{4}z^4+\ldots$$

$$a^n-1 = \frac{n}{1}z+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}z^2+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}z^3+\frac{n}{1}\cdots\frac{n-3}{4}z^4+\ldots$$

$$\frac{a^n-1}{a-1} = \frac{n}{1}+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}z+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}z^2+\frac{n}{1}\cdots\frac{n-3}{4}z^3+\ldots$$

Or, lorsque $a=1$, $a-1=z=0$; donc, tous les termes qui suivent le premier sont affectés du facteur (apparent) zéro; partant, lorsque $a=1$, $\frac{a^n-1}{a-1}=n$, ainsi que cela doit être.

Rem. 2de. Les deux termes de la fraction $\frac{a^n-1}{a-1}$ ont dans tous les cas le diviseur commun $a-1$. En effet, $a^n-1=(a-1)(a^{n-1}+a^{n-2}+\ldots+a+1)$.

Partant, la valeur de la fraction $\frac{a^n-1}{a-1}$ est indépendante du facteur $a-1$, et elle est constamment $a^{n-1}+a^{n-2}+\ldots+a+1$; dans le cas particulier où $a=1$, cette valeur est $n\times 1=n$.

En général;

$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1})$, et partant

$$\frac{a^n-b^n}{a-b}=a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1}=na^{n-1}$$

lorsque $a=b$.

De même :

$$\frac{a^n-b^m}{a^m-b^m}=\frac{(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1})}{(a-b)(a^{m-1}+a^{m-2}b+\ldots+ab^{m-2}+b^{m-1})}$$

$$=\frac{a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1}}{a^{m-1}+a^{m-2}b+\ldots+ab^{m-2}+b^{m-1}}=\frac{na^{n-1}}{ma^{m-1}}=\frac{n}{m}a^{n-m}$$

lorsque $a=b$.

§ 210. Que la progression à sommer ait pour premier terme a et pour second terme b. La somme de cette progression est :

$$a\left(1+\frac{b}{a}+\frac{b^2}{a^2}\ldots+\frac{b^{n-1}}{a^{n-1}}\right)=\frac{b^n-a^n}{a^{n-2}(b-a)} \text{ lorsque } b>a,$$

$$=\frac{a^n-b^n}{a^{n-2}(a-b)} \text{ lorsque } b<a.$$

Dans le second cas, la limite de la somme est $\frac{aa}{a-b}$.

Soit $a=b$; la somme est $n\times\frac{a^{n-1}}{a^{n-2}}=na$.

§ 211. Soit la fraction $\frac{a^n}{a-b}$ développée en suite :

$$\frac{a^n}{a-b}=\frac{a^n-a^{n-1}b}{a-b}+\frac{a^{n-1}b}{a-b}=a^{n-1}+\frac{a^{n-1}b}{a-b}$$

$$\frac{a^{n-1}b}{a-b}=\frac{a^{n-1}b-a^{n-2}b^2}{a-b}+\frac{a^{n-2}b^2}{a-b}=a^{n-2}b+\frac{a^{n-2}b^2}{a-b}$$

.
.
.

$$\frac{a^2b^{n-2}}{a-b}=\frac{a^2b^{n-2}-ab^{n-1}}{a-b}+\frac{ab^{n-1}}{a-b}=ab^{n-2}+\frac{ab^{n-1}}{a-b}$$

$$\frac{ab^{n-1}}{a-b}=\frac{ab^{n-1}-b^n}{a-b}+\frac{b^n}{a-b}=b^{n-1}+\frac{b^n}{a-b}.$$

On a donc :

$$\frac{a^n}{a-b}=a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1}+\frac{b^n}{a-b}.$$

$$=a^{n-1}\left(1+\frac{b}{a}+\frac{b^2}{a^2}+\ldots+\frac{b^{n-1}}{a^{n-1}}+\frac{b}{a-b}\cdot\frac{b^{n-1}}{a^{n-1}}\right).$$

1°. Soit $b<a$: la quantité $\frac{b^{n-1}}{a^{n-1}}$ est d'autant plus petite, que n est plus grande, et partant la somme des termes développés approche d'être égale à la quantité à développer $\frac{a^n}{a-b}$, d'autant plus qu'on a développé un plus grand nombre de termes.

2°. Soit $b>a$. La quantité $\frac{b}{a-b}\cdot\frac{b^{n-1}}{a^{n-1}}$ ou

plutôt $-\frac{b}{b-a}\cdot\frac{b^{n-1}}{a^{n-1}}$ est d'autant plus grande que n est plus grande ; partant, la somme des termes développés s'éloigne de la quantité à développer, d'autant plus qu'on en prend un plus grand nombre de termes, et on ne peut pas conclure des termes développés à la valeur de la quantité à développer, à moins qu'on ait égard au reste $\frac{b}{b-a}\cdot\frac{b^{n-1}}{a^{n-1}}$ qui va continuellement en croissant.

3°. Soit $a=b$, et partant $\frac{b^{n-1}}{a^{n-1}}=1$. La somme des termes développés diffère de la quantité à développer, de la quantité $\frac{a^n}{a-b}$, qui est la quantité elle-même à développer ; partant, quel que soit le nombre des termes développés, on ne peut en tirer aucune conséquence pour la valeur de la quantité à développer.

§ 212. Que b change de signe, et que la quantité à développer soit : $\frac{a^n}{a+b}$.

$$\frac{a^n}{a+b}=\frac{a^n+a^{n-1}b}{a+b}-\frac{a^{n-1}b}{a+b}=a^{n-1}-\frac{a^{n-1}b}{a+b}.$$

$$\frac{a^{n-1}b}{a+b}=\frac{a^{n-1}b+a^{n-2}b^2}{a+b}-\frac{a^{n-2}b^2}{a+b}=a^{n-2}b-\frac{a^{n-2}b^2}{a+b}$$

$$\frac{a^{n-2}b^2}{a+b}=\frac{a^{n-2}b^2+a^{n-3}b^3}{a+b}-\frac{a^{n-3}b^3}{a+b}=a^{n-3}b^2-\frac{a^{n-3}b^3}{a+b}$$

$$\vdots$$

$$\frac{ab^{n-1}}{a+b}=\frac{ab^{n-1}+b^n}{a+b}-\frac{b^n}{a+b}=b^{n-1}-\frac{b^n}{a+b}.$$

De là, $\frac{a^n}{a+b}=a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2 \ldots \mp ab^{n-2} \pm b^{n-1} \mp \frac{b^n}{a+b}$

$$=a^{n-1}\left(1-\frac{b}{a}+\frac{b^2}{a^2}\ldots\mp\frac{b^{n-2}}{a^{n-2}}\pm\frac{b^{n-1}}{a^{n-1}}\mp\frac{b}{a-b}\cdot\frac{b^{n-1}}{a^{n-1}}\right).$$

1°. Soit $a>b$. La somme des termes développés approche de la valeur de la quantité à développer, alternativement en plus et en moins, d'autant plus qu'on développe un plus grand nombre de termes.

2°. Soit $a<b$. La somme des termes développés s'éloigne de la quantité à développer, alternativement en plus et en moins, d'autant plus qu'on développe un plus grand nombre de termes; et on ne peut tirer aucune conséquence sur la valeur de la quantité à développer, de celle des termes développés, à moins qu'on ait égard à la différence, toujours croissante, de ces deux valeurs.

3°. Soit $a=b$. La somme des termes dé-

veloppés diffère de la valeur de la quantité à dévélopper, d'une quantité constante, alternativement en plus et en moins.

Rem. On peut obtenir immédiatement l'expression de la somme des suites dont les termes suivent une progression géométrique, et dont les signes alternent.

Soit $s = 1 - a + a^2 - a^3 \ldots \mp a^{n-2} \pm a^{n-1}$ (suivant que $n-1$ est pair ou impair.)

$as = \quad a - a^2 + a^3 \ldots \pm a^{n-2} \mp a^{n-1} \pm a^n$

$s(1+a) = 1 \quad \pm a^n$, $s = \frac{1 \pm a^n}{1+a} = \frac{1}{1+a} \pm \frac{a^n}{1+a}$

Delà, soit $s = a - b + \frac{b^2}{a} - \frac{b^2}{a^3} \ldots \mp \frac{b^{n-2}}{a^{n-3}} \pm \frac{b^{n-1}}{a^{n-2}}$

$= a\left(1 - \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} - \frac{b^3}{a^3} \ldots \mp \frac{b^{n-2}}{a^{n-2}} \pm \frac{b^{n-1}}{a^{n-1}}\right)$

On a, $s = \frac{a^n \pm b^n}{a^{n-2}(a+b)}$.

§ 213. Dans l'équation (§ 209),

$s = \frac{b^n - a^n}{a^{n-2}(b-a)} = \frac{a^n - b^n}{a^{n-2}(a-b)}$; connoissant a, b, s, on détermine n par l'équation :

$\frac{b^n}{a^n} = 1 - s \times \frac{a-b}{aa} = 1 + s \times \frac{b-a}{aa}$; et partant,

$n \log. \frac{b}{a} = \log. (1 + s \times \frac{b-a}{aa})$. Mais, si on donne s et n, et l'une ou l'autre des deux quantités a et b, on ne peut déterminer la quantité restante, que par une équation, sur la résolution générale de laquelle on n'a aucune règle.

§ 214. La progression étant décroissante, et l'expression de sa limite s étant $\frac{aa}{a-b}$; des trois quantités a, b, s, deux quelconques étant données, on peut déterminer la troisième.

1°. Soient les données a et b, on a trouvé $s = \frac{aa}{a-b}$.

2°. Soient les données a et s; on a:

$$a - b = \frac{aa}{s}; \; b = a - \frac{aa}{s} = \frac{a(s-a)}{s}.$$

Dans ce cas, si $s > a$, la suite proposée est une suite géométrique dans le sens propre de cette expression. Si $s < a$, la valeur de b change de signe, et la suite proposée est la différence de deux suites géométriques; et ce n'est que dans un sens détourné de son origine, qu'elle peut être appelée une suite géométrique.

3°. Soient les données s et b, $aa = as - bs$;

$$4aa-4as+ss=ss-4bs\,; \quad a=\frac{s\pm\sqrt{(ss-4bs)}}{2}.$$

Rem. 1[re]. Pour que le problème soit possible, on doit avoir $s \geqq 4b$; soit $s=4b$, $a=\frac{1}{2}s=2b$. Partant, le second terme d'une progression géométrique décroissante étant donné, la limite de sa somme est la plus petite, lorsque chaque terme est la moitié du terme précédent.

J'affirme que b étant donné, $\frac{aa}{a-b}$ a la plus petite valeur lorsque $a=2b$.

Soit $a=2b\pm z$; $\frac{aa}{a-b}=\frac{4bb\pm 4bz+zz}{b\pm z}=4b+\frac{zz}{b\pm z}$.

Rem. 2[de]. Soit $s>4b$. Il y a deux valeurs de a qui satisfont à l'équation: et partant, il y a deux progressions qui ont le même second terme et la même limite.

1[er]. *Ex.* Soit $b=3$, $s=16$. $a={}^{12}_{4}$.

On a donc les deux progressions:

$12, 3, \frac{3}{4}, \frac{3}{16} \ldots = 12(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\ldots), s=12\times\frac{4}{3}=16.$

$4, 3, \frac{9}{4}, \frac{27}{16} \ldots = 4(1+\frac{3}{4}+\frac{9}{16}+\frac{27}{64}+\ldots), s=4\times 4=16.$

2[d]. *Ex.* Soit $b=\frac{1}{3}$, $s=1\frac{1}{2}$, $a=1, \frac{1}{2}$.

On a donc les deux progressions:

$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots\,;\ s=\frac{3}{2}.$

$\frac{1}{2}(1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{8}{27}+\ldots)\,;\ s=\frac{1}{2}\times 3=\frac{3}{2}.$

§ 215. Je vais appliquer les progressions géo-

métriques décroissantes à la valeur des fractions décimales périodiques.

Lorsqu'on réduit en fractions décimales une fraction vulgaire, la fraction décimale est terminée, seulement lorsque le dénominateur de la fraction vulgaire n'a pour facteurs que des puissances de 2 et de 5, ou leurs produits. Dans les autres cas, la fraction décimale n'est pas terminée ; mais les caractères qui la composent reviennent les mêmes et dans le même ordre après un certain nombre de termes, lequel n'est jamais plus grand que le dénominateur de la première fraction diminué d'une unité.

Ex. $\frac{1}{3}=0{,}333\ldots$; $\frac{1}{6}=0{,}1666\ldots$ $\frac{1}{7}=0{,}142857\,142\ldots$

Ces fractions décimales ont été appelées *périodiques*.

Une fraction décimale périodique étant proposée, on peut toujours trouver la fraction vulgaire correspondante, qui est la limite de cette fraction décimale.

1°. Que les périodes de la fraction décimale soient composées chacune d'un seul caractère m. La valeur de cette fraction est $m\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\ldots\right)$, dont la limite est $m\times\frac{1}{9}$. Cette fraction est réductible lorsque

$m=3, 6, 9$. Ainsi, $0,333\ldots=\frac{1}{3}$; $0,666\ldots=\frac{2}{3}$; $0,999\ldots=1$.

2°. Que les périodes de la fraction décimale soient composées de deux termes m et m'. La valeur de cette fraction est :

$$m\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10^3}+\frac{1}{10^5}+\ldots\right)+m'\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{10^4}+\frac{1}{10^6}+\ldots\ldots\right)$$

$$=\frac{1}{10}m\left(1+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^4}+\ldots\right)+\frac{1}{100}m'\left(1+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^4}\ldots\right)$$

$$=\frac{10m+m'}{100}\times\frac{100}{99}=\frac{10m+m'}{99}.$$

Partant, le numérateur est la première période de la fraction décimale, et le dénominateur est plus petit que 100 d'une unité. Cette fraction est réductible, si le numérateur a pour diviseurs premiers 3 ou 11.

Ex. $0,4545\ldots=\frac{45}{99}=\frac{5}{11}$.

3°. Que la période de la fraction décimale contienne trois termes m, m', m''; sa valeur est:

$$\frac{100m+10m'+m''}{1000}\left(1+\frac{1}{10^3}+\frac{1}{10^6}+\ldots\right)=\frac{100m+10m'+m''}{999};$$

savoir, le numérateur de la fraction vulgaire, qui est la limite de la fraction décimale proposée, a pour numérateur la première période de la fraction décimale, et pour dénominateur la troisième puissance de 10, diminuée d'une unité.

En général, une fraction décimale périodique équivaut à une fraction vulgaire, telle que son dénominateur est inférieur d'une unité à une puissance de 10 dont l'exposant est égal au nombre des termes de la période; et que son numérateur est la première période de la fraction décimale.

§ 216. Soit une progression géométrique: les carrés de ses termes, les cubes de ses termes, et en général les puissances semblables quelconques de ses termes, forment aussi une progression géométrique.

En particulier, la limite d'une progression géométrique décroissante étant $\frac{aa}{a-b}$, la limite de la somme des carrés de ses termes est $\frac{a^4}{aa-bb}$; et partant, la limite de la somme des carrés est à la limite de la somme des termes dans le rapport de $\frac{aa}{a+b}$ à l'unité.

Prob. Déterminer une progression géométrique décroissante, en connoissant la limite s de la somme de ses termes, et la limite c de la somme de leurs carrés.

On a les deux équations: $\frac{aa}{a-b}=s$; $\frac{a^4}{aa-bb}=c$;

de là, $\frac{aa}{a+b}=\frac{c}{s}$; donc, $a+b:a-b=ss:c$.

$a:b=ss+c:ss-c$; et $a:a-b=ss+c:2c$;

ou, $\frac{a}{a-b}=\frac{ss+c}{2c}$; et $\frac{aa}{a-b}=a\times\frac{ss+c}{2c}=s$;

donc, $a=\frac{2sc}{ss+c}$; $b=a\times\frac{ss-c}{ss+c}=\frac{2sc}{ss+c}\times\frac{ss-c}{ss+c}$.

Ex. Soit $s=2$, $c=1\frac{1}{3}$; $a=1$, $b=\frac{1}{2}$.

Rem. Soit m l'exposant donné du rapport de la limite de la somme des carrés d'une progression géométrique décroissante à la somme de ses termes.

On a $\frac{aa}{a+b}=m$; de là, $b=a(\frac{a}{m}-1)$. Soit

$m=1$, $\frac{1}{2}$, 2, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$; 3.
$b=a(a-1)$, $a(2a-1)$, $a(\frac{1}{2}a-1)$, $a(3a-1)$, $a(\frac{3}{2}a-1)$, $a(\frac{1}{3}a-1)$...

§ 217. On a remarqué qu'avec les termes de la progression géométrique double, 1, 2, 4, 8, 16.... 2^{n-1} (en prenant chacun d'eux tout au plus une fois), on peut obtenir tous les nombres naturels depuis l'unité jusqu'à 2^n-1 qui est leur somme. On a aussi remarqué qu'avec les sommes ou les différences des termes de la progression géométrique triple 1, 3, 9, 27.... 3^{n-1} (aussi en prenant chacun d'eux

tout au plus une fois), on peut obtenir tous les nombres naturels depuis l'unité jusqu'à $\frac{3^n-1}{2}$ qui est leur somme. Je propose comme exercice la recherche de la démonstration générale de l'une et de l'autre de ces propriétés; qui donnent lieu à une pondération économique.

Je vais appliquer les sommations des progressions géométriques aux calculs relatifs aux rentes accumulées. Ayant égard à l'importance de cette application et à la convenance de la présenter de la manière la plus simple, je montrerai comment on peut aussi traiter ce sujet immédiatement, et indépendamment de ces sommations.

§ 218. *Prob.* Une personne possède une rente annuelle de 1200 frs., qu'elle laisse accumuler en intérêt composé au 5 pour cent, pendant 20 ans. On demande ce qu'elle possédera au bout de ces 20 ans, en supposant que ses économies commencent à la fin de la première année.

1er. *Procédé* indépendant de la sommation des suites géométriques. Comme le débiteur de la rente ne tirera aucun profit du capital dont elle est l'intérêt, pendant les 20 années de

jouissance du rentier, le débiteur pourroit remettre ce capital au rentier (en prenant les sûretés convenables), sous la condition qu'il lui soit restitué au bout des 20 ans; ce capital est $20 \times 1200 = 24000$. Le rentier mettant ce capital en intérêt composé pendant 20 ans, aura $24000 (\frac{105}{100})^{20}$; et au bout de ce tems, il devra remettre le capital 24000. Il lui restera donc $24000 ((\frac{105}{100})^{20} - 1)$, qui est le produit de ses rentes accumulées, ou des intérêts du capital 24000 pendant les vingt années de ses jouissances.

2^d. *Procédé* fondé sur la sommation des suites géométriques.

La rente perçue à la fin de la première année, mise en intérêt pendant 19 années, sera devenue $1200 \times (\frac{105}{100})^{19}$.

La rente perçue à la fin de la seconde année, mise en intérêt pendant 18 annnées, sera devenue $1200 \times (\frac{105}{100})^{18}$.

La rente perçue à la fin de la troisième année, mise en intérêt pendant 17 années, sera devenue $1200 \times (\frac{105}{100})^{17}$.

.

La rente perçue à la fin de la 19me année,

mise en intérêt pendant une année, sera devenue $1200 \times \frac{105}{100}$.

Enfin, la rente perçue à la fin de la 20me. année est 1200.

Partant, le résultat de la fructification de toutes ces rentes est :

$$1200\left(1+\tfrac{105}{100}+\left(\tfrac{105}{100}\right)^2+\ldots+\left(\tfrac{105}{100}\right)^{19}\right)=1200\times 20\left(\left(\tfrac{105}{100}\right)^{20}-1\right)$$

comme par le premier procédé.

Calcul. Log. $\frac{105}{100}$ $=0,0211893$;
log. $\left(\frac{105}{100}\right)^{20}$ $=0,4237860$;
log. 24000 $=4,3802112$;
log. $24000\left(\frac{105}{100}\right)^{20}$ $=4,8039972$;
$24000\left(\frac{105}{100}\right)^{20} = 63679,14$;
$24000\left(\left(\frac{105}{100}\right)^{20}-1\right) = 39679,14$.

valeur cherchée de la rente accumulée.

Généralement. Soit a l'annuité ou rente annuelle. Soit r le taux de l'intérêt, et partant, $\frac{100+r}{100}$ le taux de la fructification. Soit n le nombre des années de jouissance. Soit s la valeur des rentes accumulées pendant n années.

Capital dont la rente est l'intérêt, $\frac{100}{r}a$; valeur de ce capital mis en fructification pendant n années, $\frac{100a}{r} \times \left(\frac{100+r}{100}\right)^n$. Valeur des

rentes accumulées pendant n années,

$$\frac{100a}{r}\left(\left(\frac{100+r}{100}\right)^n - 1\right) = c.$$

§219. Dans l'équation $\frac{100a}{r}\left(\left(\frac{100+r}{100}\right)^n - 1\right) = c$; des quatre quantités a, r, c, n, trois étant données, on peut chercher la quatrième.

1°. Données, r, c, n; $a = c \times \frac{r}{100} \times \frac{1}{\left(\frac{100+r}{100}\right)^n - 1}$; savoir, on détermine la valeur de la rente dans le taux de l'intérêt, dans le nombre des années, et dans la valeur de toutes les rentes au bout de ce nombre d'années.

On répond donc à la question : une personne qui doit un capital c payable dans n années sans intérêt, offre d'acquitter sa dette par des paiemens égaux annuels à commencer dans une année; on demande la valeur a de chacun de ces paiemens, le taux de l'intérêt étant $r^{\frac{0}{0}}$.

Pour le calcul, je crois qu'il convient de présenter l'équation $a = c \times \frac{r}{100} \times \frac{1}{\left(\frac{100+r}{100}\right)^n - 1}$ sous la forme $\frac{1}{a} = \left(\frac{100+r}{100}\right)^n \times \frac{100}{cr} - \frac{100}{cr}$.

Ex. Soit $c=100\,000$, $n=12$, $r=6$; $\frac{100+r}{100}=\frac{106}{100}$

Log. $\frac{106}{100}=0{,}0253059$.

Log. $(\frac{106}{100})^{12}=0{,}3036708$.

Log. $\frac{100}{cr}=6{,}221\,8487\ (-10)$.

Log. $(\frac{106}{100})^{12}\times\frac{100}{cr}=6{,}525\,5195\ (-10)$.

$(\frac{106}{100})^{12}\times\frac{100}{cr}=0{,}000\,3354$.

$\frac{100}{cr}=0{,}001\,6667$.

$\frac{1}{a}=0{,}000\,1687$.

$a=\frac{10\,000\,000}{1687}=59276$.

2°. Données, a, r, c; $(\frac{100+r}{100})^n=\frac{cr}{100a}+1$; dans laquelle formule $\frac{cr}{100}$ est l'intérêt de c au taux r; $n\log.\frac{100+r}{100}=\log.1+\frac{cr}{100a}$.

Ex. Soit $c=100000$, $r=5$, $a=10000$; $\frac{cr}{100}=5000$; $\frac{cr}{100a}=\frac{1}{2}$, $1+\frac{cr}{100a}=1{,}5$; $n=\frac{\log.1{,}5}{\log.1{,}06}=\frac{1760\,913}{253\,059}=7^-$.

Partant, une rente de 10000 frs. payée pendant 7 ans, deviendra au bout de ce tems plus que 100000 frs.

3°. Les données étant a, c, n, je ne con-

nois aucun procédé de déterminer r autrement que par des essais, dans chaque cas particulier.

§ 220. *Prob.* Une personne doit jouir pendant 20 années d'une rente annuelle de 1500 f. dont elle doit recevoir le premier paiement dans un an. Elle voudroit échanger cette rente contre un capital à recevoir présentement, en comptant l'intérêt au 5 pour cent : on demande quel doit être ce capital.

1er. *Proc.* Indépendant de la sommation des suites géométriques. Si la rente étoit perpétuelle, on devroit remettre au rentier le capital dont 1500 frs. est l'intérêt, lequel est 30000. Comme la jouissance de cette rente doit cesser dans 20 ans, le rentier, au bout de ce tems, doit rendre ce capital ; ou bien il doit rendre à présent la valeur présente de ce capital payable dans 20 ans sans intérêt, laquelle valeur est $30000 \times (\frac{100}{105})^{20}$. Donc, la valeur présente de la rente proposée est $30000(1-(\frac{100}{105})^{20})$; exécutant ce calcul, on trouve pour cette valeur 18693,35.

2d. *Proc.* Valeur présente de la 1re rente $1500 \times \frac{100}{105}$.
Valeur présente de la 2de rente . . . . . $1500 \times (\frac{100}{105})^2$.
Valeur présente de la 3me rente . . . . . $1500 \times (\frac{100}{105})^3$.
Valeur présente de la 19me rente . . . . $1500 \times (\frac{100}{105})^{19}$.
Valeur présente de la 20me rente . . . $1500 \times (\frac{100}{105})^{20}$.

Valeur présente de toutes les rentes :

$1500 \times \frac{100}{105}(1+\frac{100}{105}+(\frac{100}{105})^2+\ldots+(\frac{100}{105})^{19})$

$=1500 \times \frac{100}{105} \times \frac{105}{5}(1-(\frac{100}{105})^{20})=30000-30\,000 \times (\frac{100}{105})^{20}$,

ainsi que par le premier procédé.

3me. *Proc.* Soit s le capital égal à la valeur présente de la rente proposée. Au bout de 20 ans, ce capital mis en fructification, sera devenu $s(\frac{105}{100})^{20}$.

Les rentes successives accumulées seront devenues (§ 217) $30\,000((\frac{105}{100})^{20}-1)$.

Or, au bout des 20 ans ces deux sommes doivent être égales; on a donc pour déterminer s l'équation $s(\frac{105}{100})^{20}=30\,000(\frac{105}{100})^{20}-30\,000$. De là, $s=30\,000-30\,000(\frac{100}{105})^{20}$, ainsi que par les deux premiers procédés.

Général. Soit a la rente annuelle; r le taux de l'intérêt; n le nombre des années pendant lesquelles la rente doit être payée. Soit s le capital équivalent présentement à cette rente.

Le capital dont la rente est l'intérêt est $\frac{100a}{r}$; soit désigné ce capital par c. Si la rente étoit perpétuelle, le débiteur de la rente devroit remettre ce capital au rentier. La rente étant payable seulement pendant n années, le rentier doit rendre ce capital c au bout de n années; et partant, il doit rendre

à présent sa valeur présente qui est $c(\frac{100}{100+r})^n$.

Donc, la valeur présente de la rente est

$$c\left(1-\left(\frac{100}{100+r}\right)^n\right)=\frac{100a}{r}\left(1-\left(\frac{100}{100+r}\right)^n\right)=s.$$

1[re]. *Rem.* Dans l'équation $s=\frac{100a}{r}\left(1-\left(\frac{100}{100+r}\right)^n\right)$, connoissant trois quelconques des quantités a, r, n, s, on peut se proposer de déterminer la quatrième.

1°. *Connues.* s, r, n, on a, $a=s\times\frac{r}{100}\times\frac{1}{1-\left(\frac{100}{100+r}\right)^n}$,

$\frac{1}{a}=\frac{100}{sr}-\frac{100}{sr}\left(\frac{100}{100+r}\right)^n$. On détermine ainsi la valeur d'une rente qu'on peut se procurer pendant un nombre donné d'années, avec un capital s payable présentement.

2°. *Connues.* s, r, a; on a $1-\left(\frac{100}{100+r}\right)^n=\frac{sr}{100a}$,

$$\left(\frac{100}{100+r}\right)^n=\frac{100a-sr}{100a};\ \left(\frac{100+r}{100}\right)^n=\frac{100a}{100a-sr}.$$

$$n\log.\frac{100+r}{100}=\log.\frac{100a}{100a-sr}=\log.\frac{a}{a-\frac{sr}{100}}.$$

1re. *Rem.* Dans cette équation $\frac{sr}{100}$ est l'intérêt du capital *s*.

2de. *Rem.* Si la rente *a* étoit égale à l'intérêt du capital *s*, la valeur de ce capital, mis en fructification, seroit toujours plus grande que la valeur de son intérêt (mis aussi en fructification) d'une quantité égale à lui-même ; et partant, pour que les rentes accumulées puissent égaler le capital *s* mis en fructification, la rente *a* doit être plus grande que l'intérêt du capital *s*; donc, *n* est impossible lorsque $a < \frac{sr}{100}$. Or, *n* est déterminée par l'équation $n\log.\frac{100+r}{100} = \log.a - \log.(a - \frac{sr}{100})$; l'impossibilité de *n* lorsque $a < \frac{sr}{100}$ est donc indiquée dans ce cas par le logarithme d'une quantité négative qui entre dans son expression; et partant, cet exemple nous fournit une forte présomption que les logarithmes des quantités négatives sont impossibles (voyez aussi le § 205).

3°. Connoissant *a*, *s*, *n*, on n'a aucun moyen direct de déterminer la valeur de *r*.

Exemp. Une personne qui possède 100000 francs,

francs, qu'elle peut faire valoir au 5%, veut se procurer avec ce capital une rente annuelle payable pendant 20 ans : quelle doit être la grandeur de cette rente?

Une personne qui possède 100 000 francs qu'elle fait valoir au 5%, dépense chaque année 10 000 frs. : on demande au bout de combien d'années cette personne sera ruinée.

Une personne qui possède 100000 frs., achète avec ce capital une rente de 10000 frs. : elle économise cette rente et la fait valoir au 5% : au bout de combien d'années aura-t-elle recouvré son premier capital et ses intérêts composés sur le même taux ?

Item. Au bout de combien d'années sera-t-elle deux, trois, quatre . . . . . . fois aussi riche, que si elle avoit fait valoir en fructification son premier capital ?

Item. Au bout de combien d'années possédera-t-elle une somme proposée c de plus que si elle avoit conservé et fait valoir son premier capital en fructification ?

Je passe à d'autres exercices relatifs aux progressions géométriques.

§221. *Prob*. Trouver trois nombres en proportion géométrique continue ; en connois-

sant le premier terme a, et la somme s des deux derniers termes.

Dém. Soit le terme moyen, x; le troisième terme sera $\frac{xx}{a}$.

Cond. $\frac{xx}{a}+x=s$.

Réd. $4xx+4ax=4as$;

Sol. $x=\frac{-a\pm\sqrt{(aa+4as)}}{2}$, $\frac{xx}{a}=\frac{a+2s\mp\sqrt{(aa+4as)}}{2}$.

Ex. Soit $\begin{matrix} a=1 \\ s=6 \end{matrix}$, $\begin{matrix} 2 \\ 24 \end{matrix}$, $\begin{matrix} 9 \\ 28 \end{matrix}$.

Rem. 1re. La première valeur de x répond toujours à la question dans le sens propre de l'énoncé : la seconde valeur de x est négative, et elle répond à la question dans laquelle s est l'excès du troisième terme sur le second, en changeant le signede celui-ci; ou cette seconde valeur de x résout l'équation $\frac{xx}{a}-x=s$.

Rem. 2de. Que s soit l'excès du second terme sur le troisième.

De l'équation $x-\frac{xx}{a}=s$; on tire,

$x=\frac{a\mp\sqrt{(aa-4as)}}{2}$; $\frac{xx}{a}=\frac{a-2s\pm\sqrt{(aa-4as)}}{2}$.

Dans ces formules, la plus grande valeur de s est $\frac{1}{4}a$; et dans le cas de la limite $x=\frac{1}{2}a$, $\frac{xx}{a}=\frac{1}{4}a$.

Soit $x=\frac{1}{2}a\pm z$; $\frac{xx}{a}=\frac{1}{4}a\pm z+\frac{zz}{a}$; $x-\frac{xx}{a}=\frac{1}{4}a-\frac{zz}{a}$;

et partant, la plus grande valeur de s est $\frac{1}{4}a$.

Lorsque $s<\frac{1}{4}a$, les quantités cherchées ont deux valeurs réelles différentes entr'elles.

Ex. Soit $\frac{a=3}{s=1}$, $\frac{16}{3}$, $\frac{25}{6}$.

Rem. 3me. De l'équation $\frac{xx}{a}+x=s$; ou $x(x+a)=as$; on tire la proportion $a:x=a+x:s$; en effet, soient a, b, c, trois nombres en proportion continue, ou soit $a:b=b:c$; on a aussi $a:b=a+b:b+c$ (§ 45).

Item : l'équation $x-\frac{xx}{a}=s$; donne la proportion $a:b=a-b:b-c$.

§ 222. *Prob.* Trouver trois nombres en proportion géométrique continue, en connoissant leur somme $2s$; et la somme de leurs carrés $4c$.

Dén. Soit le terme moyen $2x$; la somme des extrêmes sera $2s-2x$; carré de la demi-différence des extrêmes, $(s-x)^2-4xx$; termes

extrêmes, $s-x+\sqrt{((s-x)^2-4xx)}$, $s-x-\sqrt{((s-x)^2-4xx)}$. somme des carrés des extrêmes, $4(s-x)^2-8xx$; somme des carrés des trois termes, $4(ss-2sx)$.

Cond. $4(ss-2sx)=4c$.

Réd. et *Sol.* $2x=s-\frac{c}{s}$. $2s-2x=s+\frac{c}{s}$.

$$(s-x)^2-4xx=\frac{3ss-c}{2s}\times\frac{3c-ss}{2s}=\frac{c-3ss}{2s}\times\frac{ss-3c}{2s}.$$

Ex. Soit $\begin{array}{c}2s=14\\4c=84\end{array}$, $\begin{array}{c}38\\532\end{array}$.

Rem. 1re. Pour que le problême soit possible on doit avoir en même tems $3ss\gtrless c$, $ss\lessgtr 3c$.

Rem. 2de. Lorsque $ss>c$, le problême est résolu dans le sens propre de l'énoncé; mais lorsque $ss<c$, le terme moyen change de signe, et la quantité $2s$, est l'excès de la somme des extrêmes sur le terme moyen. En effet, soit proposée la question, dans laquelle $2s$ est l'excès de la somme des extrêmes sur le terme moyen; on obtient l'équation $s(s+2x)=c$, qui diffère de l'équation $s(s-2x)=c$, seulement par le signe de x; et de laquelle on tire $2x=\frac{c}{s}-s$, au lieu de $2x=s-\frac{c}{s}$; et pour qu'on réponde à cette seconde question, on doit avoir $ss<c$.

Soient a, b, c, trois termes inégaux en proportion géométrique continue, j'affirme que $(a-b+c)^2<aa+bb+cc$. En effet, $(a-b+c)^2=aa+bb+cc-2b(a+c)+2ac=$ $aa+bb+cc-2b(a-b+c)$.

Rem. 3me. Relativement au terme moyen ou à la somme des extrêmes, le problême est du premier degré : mais il est du second degré relativement à la différence des extrêmes et à chacun d'eux.

Rem. 4me. La simplicité de l'expression de la somme des trois carrés $4s(s-2x)$ doit faire présumer qu'on peut l'obtenir d'une manière plus simple que celle par laquelle on y est parvenu, en la tirant d'une manière plus immédiate des propriétés des proportions géométriques : pour cela, soit admise la notation de la remarque seconde.

1°. J'affirme que $aa+bb+cc=(a+b+c)(a-b+c)$.

En effet : $(a+b+c)(a-b+c)=(a+c)^2-bb=aa+bb+cc$, puisque $ac=bb$. Savoir, dans toute proportion géométrique continue, la somme des carrés des trois termes est égale au produit de la somme des trois termes par l'excès de la somme des extrêmes sur le terme moyen.

2°. Du carré $(a+b+c)^2$ de la somme des trois termes, soient retranchés les membres de l'é-

quation du 1°., on obtient $(a+b+c)^2-(aa+bb+cc)$ $=2b(a+b+c)$; ou, le double produit du terme moyen par la somme des trois termes est égal à l'excès du carré de la somme des trois termes sur la somme de leurs carrés. On a de même: $aa+bb+cc-(a-b+c)^2=2b(a-b+c)$.

3°. Aux membres de l'équation du 1°. soit ajouté le carré $(a+b+c)^2$ de la somme des trois termes; on obtient $(a+b+c)^2+(aa+bb+cc)$ $=2(a+b+c)(a+c)$; savoir, le double produit de la somme des trois termes par la somme des extrêmes, est égal à la somme du carré de la somme des trois termes et de la somme de leurs carrés. On a de même : $aa+bb+cc+(a-b+c)^2=2(a-b+c)(a+c)$.

4°. Lorsqu'on donne $ss>c$, et à plus forte raison $3ss>c$; dans l'expression du carré de la demi-différence des extrêmes $(3s-\frac{c}{s})(3\frac{c}{s}-s)$; le premier facteur est positif, et partant, le second facteur doit être aussi positif.

J'affirme que $3(aa+bb+cc)>(a+b+c)^2$.

En effet, $3(aa+bb+cc)-(a+b+c)^2$ $=3(a+b+c)(a-b+c)-(a+b+c)^2=2(a+b+c)(a-2b+c)$. Or, $a+c>2b$ (§ 46), donc, $3(aa+bb+cc)>(a+b+c)^2$.

Item : lorsqu'on donne $ss<c$, et à plus forte raison $ss<3c$, pour que le produit

$(3ss-c)(c-3ss)$ soit positif, on doit avoir $3ss>c$; j'affirme que $3(a-b+c)^2>aa+bb+cc$.

En effet : $3(a-b+c)^2-(aa+bb+cc)$ $=(a-b+c)(3(a-b+c)-(a+b+c))=2(a-b+c)(a-2b+c)$.

Il suit de tout ce qui précède, que les deux problêmes dans l'un desquels $2s$ est la somme des trois termes, et dans l'autre desquels $2s$ est l'excès de la somme des extrêmes sur le terme moyen, sont liés entr'eux d'une manière si intime, qu'on résout l'un ou l'autre suivant la grandeur donnée de c relativement à s. On résout le premier, si $ss>c$; et on résout le second si $ss<c$. Pour que l'un d'eux soit possible, on doit avoir $3c>ss$, et $c<3ss$.

Aut. exerc. Trouver trois nombres en proportion géométrique continue, en connoissant la somme ou la différence de la somme des extrêmes et du terme moyen, et l'excès de la somme des carrés des extrêmes sur le carré du terme moyen.

§ 223. *Théor.* Dans toute progression géométrique composée d'un nombre impair de termes ; j'affirme que la somme des carrés de tous les termes est égale au produit de la somme de tous les termes, par l'excès de la somme des termes impairs sur la somme des termes pairs.

Ex. Soit $1+x+x^2+x^3+x^4$ une suite géométrique composée de cinq termes. Soit, $1-x+x^2-x^3+x^4$, la même suite dans laquelle les termes alternent de signe. Soit pris le produit de ces deux suites.

Multip^{de},	$1-x+x^2-x^3+x^4$
Multip^{r}.	$1+x+x^2+x^3+x^4$
pr. par 1	$1-x+x^2-x^3+x^4$
pr. par x	$x-x^2+x^3-x^4+x^5$
pr. par x^2	$x^2-x^3+x^4-x^5+x^6$
pr. par x^3	$x^3-x^4+x^5-x^6+x^7$
pr. par x^4	$x^4-x^5+x^6-x^7+x^8$
pr. total,	$1 \quad +x^2 \quad +x^4 \quad +x^6 \quad +x^8.$

Savoir, dans les colonnes verticales composées des puissances impaires de x, il y a un même nombre de termes positifs et négatifs, et qui, par conséquent, se détruisent; et dans les colonnes verticales, composées de puissances paires de x, il y a un terme positif de plus qu'il n'y en a de négatifs.

Autrem. Soient s et s' les sommes des deux suites :

$$1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{n-2}+x^{n-1} \qquad s=\frac{1-x^n}{1-x}, \quad s'=\frac{1+x^n}{1+x}.$$
$$1-x+x^2-x^3 \ldots\ldots -x^{n-2}+x^{n-1}$$

$$ss'=\frac{1-x^{2n}}{1-x^2}=1+x^2+x^4+\ldots+x^{2n-2}.$$

Corol. Connoissant la somme des termes d'une progression géométrique composée d'un nombre impair de termes, et la somme de leur carrés; on connoît aussi l'excès de la somme des termes impairs sur la somme des termes pairs; et partant, on connoît chacune des deux sommes des termes pairs et des termes impairs.

§ 224. *Prob.* Trouver cinq nombres en progression géométrique, en connoissant la somme $2s$ des termes pairs, et la somme $2s'$ des termes impairs.

Dén. Terme moyen ou troisième terme, x; carré de la demi-différence des termes pairs, $ss-xx$; termes pairs, $s+\sqrt{(ss-xx)}$, $s-\sqrt{(ss-xx)}$; termes extrêmes, $\frac{(s+\sqrt{(ss-xx)})^2}{x}$, $\frac{(s-\sqrt{(ss-xx)})^2}{x}$; somme des extrêmes, $\frac{4ss-2xx}{x}$; somme des termes impairs, $\frac{4ss-xx}{x}$.

Cond. $\frac{4ss-xx}{x}=2s'$.

Réd. $xx+2s'x=4ss$;

Sol. $x=-s'\pm\sqrt{(s's'+4ss)}$;

$ss-xx=(s-s'\pm\sqrt{(s's'+4ss)})(s+s'\mp\sqrt{(s's'+4ss)})$.

Rem. 1[re]. La seconde valeur de x est négative, et elle donneroit pour $ss-xx$ une valeur négative, et partant pour $\sqrt{(ss-xx)}$ une expression imaginaire ; donc, cette seconde valeur doit être omise.

Rem. 2[de]. Pour que $ss-xx$ soit positive, on doit avoir, $s+s' \geqq \sqrt{(s's'+4ss)}$; d'où l'on obtient $2s' \geqq 3s$. Savoir, dans toute progression géométrique composée de cinq termes inégaux, le double de la somme des termes impairs est plus grand que le triple de la somme des termes pairs.

Soient a, b, c, d, e, cinq termes en progression géométrique ; j'affirme que $2(a+c+e)>3(b+d)$.

Dém. $a+c>2b$; $c+e>2d$; $a+e>b+d$ (§ 46) ; donc, $2(a+c+e)>3(b+d)$.

Rem. 3[me]. La simplicité de l'équation $xx+2s'x=4ss$, ou $c(a+2c+e)=(b+d)^2$; doit faire présumer qu'on peut l'obtenir d'une manière plus simple que celle qui a été employée.

En effet, $ac=bb$; $2cc=2bd$; $ce=dd$; donc, $c(a+2c+e)=bb+2bd+dd=(b+d)^2$.

Autr. Puisque, $a:c=c:e$; $a+c:c+e=a:c=b:d$; $a+2c+e:b+d=a+c:b=b+d:c$; et $c(a+2c+e)=(b+d)^2$.

Rem. 4[me]. Le problême, trouver cinq nombres en progression géométrique en connoissant leur somme et la somme de leurs carrés; est ramené (§ 223) au problème de ce §.

Rem. 5[me]. Les problèmes analogues au précédent, sur des quantités en nombre impair plus grand que cinq, conduisent à des équations supérieures au second degré, d'autant plus élevées que le nombre de ces quantités est plus grand. Au contraire, des questions analogues sur des quantités en nombre pair sont toujours ramenées à la question simple du premier degré, partager une somme donnée en parties dont le rapport est donné.

1[er]. *Ex.* Trouver quatre nombres en progression géométrique en connoissant les deux sommes s et s' des deux termes alternatifs.

Soient a, b, c, d, les quatre nombres cherchés.

Puisque $a:b=b:c=c:d$; $a+c:b+d=a:b$; donc, $s:s'=a:b$; et $s^2:s'^2=aa:bb=a:c$;

$s^2+s'^2:s^2=a+c:a=s:a$; $a=s\times\frac{s^2}{s^2+s'^2}$;

$c=s\times\frac{s'^2}{s^2+s'^2}$; $b=s'\times\frac{ss}{s^2+s'^2}$; $d=s'\times\frac{s'^2}{s^2+s'^2}$.

2^d. *Ex.* Soient a, b, c, d, e, f, six nombres en progression géométrique, dont on connoît la somme $a+c+e$ des termes impairs, et la somme $b+d+f$ des termes pairs.

On a donc, $a+c+e : b+d+f = a : b$
$(a+c+e)^2 : (b+d+f)^2 = aa : bb = a : c = c : e = ss : s's'$;

d'où l'on tire en particulier $a = s \times \frac{s^4}{s^4 + sss's' + s'^4}$;

$c = s \times \frac{sss's'}{s^4 + sss's' + s'^4}$; $e = s \times \frac{s'^4}{s^4 + sss's' + s'^4}$.

Autr. exercices sur les progressions géométriques composées de cinq termes.

Connues; $\frac{a+e}{b+d}$; $\frac{a+c+e}{b+d}$; $\frac{a+e}{b+c+d}$.

Les problèmes auxquels ce tableau donne lieu, conduisent à des théorèmes analogues à ceux auxquels a donné lieu l'exemple résolu $a+c+e$, $b+d$; et leur démonstration est susceptible du même degré de simplicité.

On peut aussi résoudre simultanément quelques-unes de ces questions. Par exemple, puisque la question dans laquelle les données sont $a+c+e$, et $b+d$, conduit à l'équation $c(a+2c+e) = (b+d)^2$; si on donne $a+e$ et $b+d$, on déterminera c; de même, $c(a-2c+e) = (b-d)^2$; donc, connoissant $a+e$ et $b-d$ on déterminera c.

§ 225. *Prob.* Trouver quatre nombres en progression géométrique, en connoissant la somme $2s$ des deux moyens, et la somme $2s'$ des deux extrêmes.

Comme les termes extrêmes et les termes moyens jouissent d'une propriété commune; savoir, que leur produit est le même : il est à présumer que la recherche de ce produit doit être plus simple que celle de toute autre quantité relative à la progression cherchée.

Dén. Soit p le produit cherché des extrêmes ou des moyens : demi-différence des deux moyens, $\sqrt{(ss-p)}$:

termes moyens, $s+\sqrt{(ss-p)}$, $s-\sqrt{(ss-p)}$.

termes extrêmes
$$\frac{(s+\sqrt{(ss-p)})^2}{s-\sqrt{(ss-p)}}=\frac{(s+\sqrt{(ss-p)})^3}{p}$$
$$\frac{(s-\sqrt{(ss-p)})^2}{s+\sqrt{(ss-p)}}=\frac{(s-\sqrt{(ss-p)})^3}{p}$$

Somme des extrêmes, $\frac{2s^3+6s(ss-p)}{p}=\frac{8s^3-6sp}{p}$.

Cond. $\frac{8s^3-6sp}{p}=2s'$

Réd. $8s^3-6sp=2s'p$;

Sol. $p=\frac{4s^3}{3s+s'}$; $ss-p=ss\times\frac{s'-s}{s'+3s}$.

$$s+\sqrt{(ss-p)}=s\left(1+\sqrt{\frac{s'-s}{s'+3s}}\right);\quad s-\sqrt{(ss-p)}=s\left(1-\sqrt{\frac{s'-s}{s'+3s}}\right);$$

$$\frac{(s+\sqrt{(ss-p)})^2}{s-\sqrt{(ss-p)}}=\frac{s'+3s}{4}\left(1+\sqrt{\frac{s'-s}{s'+3s}}\right)^3;$$

$$\frac{(s-\sqrt{(ss-p)})^2}{s+\sqrt{(ss-p)}}=\frac{s'+3s}{4}\left(1-\sqrt{\frac{s'-s}{s'+3s}}\right)^3.$$

Exemp. Soit $\begin{matrix} 2s=12 \\ 2s'=28 \end{matrix}$, $\begin{matrix} 60 \\ 70 \end{matrix}$.

Rem. 1re. Pour que le problème soit possible, on doit avoir $s' \geqq s$ (§ 46).

Remar. 2de. La simplicité de l'équation $p(s'+3s)=4s^3$, qui peut se convertir dans la proportion, $s'+3s:s=4ss:p$, doit faire présumer qu'on peut l'obtenir d'une manière plus simple que celle qui a été employée, d'après les propriétés des proportions.

Soient a, b, c, d, quatre quantités en progression géométrique ; j'affirme que, $a+3b+3c+d:b+c=(b+c)^2:bc$.

Dém. Puisque $a:b=b:c=c:d$;

$a+b+c \quad :b+c+d=b:c$ (§ 45)

$a+2b+2c+d:b+c+d=b+c:c$

$a+3b+3c+d:b+2c+d=b+c:c$

$a+3b+3c+d:b+c \quad =b+2c+d:c$

$\quad =b(b+2c+d):bc$

$\quad =bb+2bc+cc:bc=(b+c)^2:bc.$

De là, $a+3b+3c+d:4(b+c) \quad =(b+c)^2:4bc$

$a+3b+3c+d:a-b-c+d=(b+c)^2:(b-c)$.

Savoir, dans une progression géométrique de quatre termes, la somme et la différence de la somme des extrêmes et du double de la somme des moyens sont entr'elles comme les carrés de la somme et de la différence des moyens.

Rem. 3me. Le produit des extrêmes ou des moyens est déterminé par une équation simple du premier degré : mais les différences soit des extrêmes, soit des moyens, et ces termes eux-mêmes sont déterminés par une équation du second degré.

Soit $2x$ la différence des deux moyens : termes moyens, $s+x$, $s-x$; termes extrêmes

$\frac{(s+x)^2}{s-x}$, $\frac{(s-x)^2}{s+x}$; somme des extrêmes,

$$\frac{(s+x)^3+(s-x)^3}{ss-xx}=\frac{2s(ss+3xx)}{ss-xx}=2s'\text{; de là,}$$

$$xx=ss\times\frac{s'-s}{s'+3s}\text{, comme précédemment.}$$

La recherche immédiate de quelqu'un des termes de la progression conduit à une équation complète du second degré.

Aut. Prob. Trouver quatre nombres en progression géométrique, en connoissant la différence des extrêmes et la différence des

moyens. Ce problème donne lieu à des procédés et à des remarques tout à fait analogues aux procédés et aux remarques du § précédent. En particulier, pour que le problème soit possible, on trouve que la différence des extrêmes ne doit pas être plus petite que le triple de la différence des moyens.

Les deux problèmes suivans, analogues aux deux derniers, se résolvent par des équations supérieures au second degré. Trouver quatre nombres en progression géométrique, en connoissant, 1°. la somme des extrêmes et la différence des moyens ; 2°. la différence des extrêmes et la somme des moyens.

§ 226. *Prob.* Trouver quatre nombres en progression géométrique, en connoissant leur somme $4s$, et la somme de leurs carrés $16c$.

Dén. Somme cherchée des moyens . . . $2x$.

Somme des extrêmes . . . . $4s-2x$.

Demi-différence des moyens . . $x\sqrt{\frac{s-x}{s+x}}$ (§ 225)

Moyens . . . . . . $x\left(1+\sqrt{\frac{s-x}{s+x}}\right)$, $x\left(1-\sqrt{\frac{s-x}{s+x}}\right)$.

Extrêmes . . $\frac{s+x}{2}\left(1+\sqrt{\frac{s-x}{s+x}}\right)^3$, $\frac{s+x}{2}\left(1-\sqrt{\frac{s-x}{s+x}}\right)^3$.

Somme

Somme des carrés des moyens, $2xx(1+\frac{s-x}{s+x})=\frac{4sxx}{s+x}$.

Somme des carrés des extrêmes,

$$\frac{(s+x)^2}{4}\left\{1+\sqrt{\frac{s-x}{s+x}}^6+(1-\sqrt{\frac{s-x}{s+x}})^6\right\}=\frac{4s}{s+x}(4ss-3xx),$$

Somme des quatre carrés . . . . $\frac{8s}{s+x}(2ss-xx)$.

Cond. $\frac{8s}{s+x}(2ss-xx)=16c$.

Réd. $s(2ss-xx)=2c(s+x)$;
$ssxx+2csx=2ss(ss-c)$; $sx=-c\pm\sqrt{(s^4+(ss-c)^2)}$.

Sol. $x=\frac{-c\pm\sqrt{(s^4+(ss-c)^2)}}{s}$;

$$s-x=\frac{ss+c\mp\sqrt{(s^4+(ss-c)^2)}}{s};$$

$$s+x=\frac{ss-c\pm\sqrt{(s^4+(ss-c)^2)}}{s}.$$

A la seconde valeur de x répond une valeur négative de $\frac{s-x}{s+x}$; et partant, une expression imaginaire de la différence des moyens, donc la seule valeur de x admissible est,
$\frac{\sqrt{(s^4+(ss-c)^2)}-c}{s}$.

Ex. Soit $4s=40$, 60, 65
$16c=820$, 1360, 1261.

Rem. 1re. Pour que le problème soit possible, la valeur de $s-x$ doit être positive; et partant, $ss+c \overline{\overline{>}} \sqrt{(s^4+(ss-c)^2)}$ ou $4c \overline{\overline{>}} ss$. Savoir, dans toute progression géométrique de quatre termes, la somme de leurs carrés n'est pas plus petite que le carré de leur demi-somme. Je vais démontrer cette propriété, en assignant en même tems la différence de cette somme et de ce carré.

Soient a, b, c, d, quatre nombres en progression géométrique : $4(aa+bb+cc+dd)-(a+b+c+d)^2$ $=3(aa+bb+cc+dd)-2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$. $=(a-b)^2+(c-d)^2+2(a-d)^2$; parce que $bc=ad$, $ac=bb$, $bd=cc$.

Rem. 2de. La simplicité de l'expression de la somme des carrés des quatre termes $\frac{8s(2ss-xx)}{s+x}$, doit faire présumer qu'on peut l'obtenir immédiatement d'après les propriétés des proportions et des progressions géométriques; c'est ce que je développe comme il suit :

1°. Puisque $a:b=b:c=c:d$;
$a+b:b+c=b+c:c+d$; et $(a+b)(c+d)=(b+c)^2$.

2°. $(a+b+c+d)^2=(a+b)^2+2(a+b)(c+d)+(c+d)^2$
$=(a+b)^2+(c+d)^2+2(b+c)^2$.

Donc, $(a+b)^2+(c+d)^2=(a+b+c+d)^2-2(b+c)^2$.

3°. De là, $2(ab+cd)$
$=(a+b+c+d)^2-(aa+bb+cc+dd)-2(b+c)^2$;
et $(a-b)^2+(c-d)^2$
$=2(aa+bb+cc+dd)-(a+b+c+d)^2+2(b+c)^2$.

4°. Puisque $a:b=b:c=c:d$;
$(a-b)^2:(a+b)^2=(c-d)^2:(c+d)^2=(b-c)^2:(b+c)^2$;
et $(a-b)^2+(c-d)^2:(a+b)^2+(c+d)^2=(b-c)^2:(b+c)^2$
ou, $2(aa+bb+cc+dd)-(a+b+c+d)^2+2(b+c)^2$
$:(a+b+c+d)^2-2(b+c)^2=(b-c)^2:(b+c)^2$.
$=a-b-c+d:a+3b+3c+d$ (§ 225)
$=a+b+c+d-2(b+c):a+b+c+d+2(b+c)$;
de là, $2(aa+bb+cc+dd):(a+b+c+d)^2-2(b+c)^2$
$=2(a+b+c+d):a+b+c+d+2(b+c)$;
$aa+bb+cc+dd:(a+b+c+d)^2-2(b+c)^2$
$=(a+b+c+d)(b+c):(a+b+c+d)(b+c)+2(b+c)^2$

$$\begin{matrix} a+bb+cc+dd+(a+b+c+d)(b+c) \\ :(a+b+c+d)(a+2b+2c+d) \end{matrix} = \begin{matrix} a+b+c+d \\ :(a+b+c+d+2(b+c)) \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} aa+bb+cc+dd+(a+b+c+d)(b+c) \\ :(a+b+c+d)^2-(aa+bb+cc+dd) \end{matrix} = \begin{matrix} a+b+c+d \\ :2(b+c) \end{matrix}$$

ou, $16c+8sx:16ss-16c=4s:4x$;

$$2c+sx: 2(ss-c) = s: x;$$

$sxx+2sc=2s(ss-c)$; ainsi que nous l'avons trouvé.

Rem. 3[me]. Au lieu d'établir les dénominations d'après les formules trouvées dans le § 225, en exprimant la différence des moyens

dans leur somme et dans celle des quatre termes ; on auroit pu résoudre ce problème immédiatement comme il suit.

Dén. Somme des moyens, $2x$; différence des moyens, $2y$; termes moyens, $x+y$, $x-y$;

termes extrêmes, $\frac{(x+y)^2}{x-y}$, $\frac{(x-y)^2}{x+y}$; somme des

extrêmes, $2x \times \frac{xx+3yy}{xx-yy}$; somme des quatre

termes, $4x \times \frac{xx+yy}{xx-yy}$. Somme des carrés des

moyens, $2(xx+yy)$; somme des carrés des

extrêmes, $\frac{(x+y)^6+(x-y)^6}{(xx-yy)^2} =$

$\frac{2(x^6+15x^4yy+15xxy^4+y^6)}{(xx-yy)^2} =$

$2(xx+yy) \times \frac{x^4+14xxyy+y^4}{(xx-yy)^2}$; somme des qua-

tre carrés, $4(xx+yy) \times \frac{x^4+6xxyy+y^4}{(xx-yy)^2}$.

Cond. $$\begin{cases} 4x \times \frac{xx+yy}{xx-yy} = 4s \text{ (A)} \\ 4(xx+yy) \times \frac{x^4+6xxyy+y^4}{(xx-yy)^2} = 16c \text{ (B)}. \end{cases}$$

Réd. Dans l'équation B soit substituée à $\frac{xx+yy}{xx-yy}$ sa valeur $\frac{s}{x}$, tirée de l'équation A; on aura, $\frac{s}{x}\times\frac{x^4+6xxyy+y^4}{xx-yy}=4c$ (C); dans l'équation A soit prise la valeur de y en x, on obtient $yy=xx\frac{s-x}{s+x}$. Dans l'équation C soit substituée à yy cette valeur, on obtient (après les réductions convenables), $\frac{2ss-xx}{2(s+x)}=\frac{c}{s}$, conformément au premier procédé (1).

Aut. ex. Trouver quatre nombres en progression géométrique, en connoissant l'excès

---

(1) Ce problème est un des plus remarquables et un des plus exerçans de ceux qui sont réductibles au second degré. Il a occupé plusieurs mathématiciens. Le premier procédé que j'ai exposé, paroit avoir l'inconvénient d'introduire des expressions radicales dans les dénominations; mais ces radicaux disparoissent dans les dénominations elles-mêmes; il réduit immédiatement une question compliquée à une question plus simple déjà résolue, et il ne demande l'introduction que d'une seule inconnue. Les éclaircissemens contenus dans la *Rem.* 2de. sont principalement destinés à servir d'exercices domestiques aux élèves studieux.

de la somme des extrêmes sur la somme des moyens, et l'excès de la somme des carrés des extrêmes sur la somme des carrés des moyens.

La question dans laquelle on donne l'excès de la somme des extrêmes sur la somme des moyens, et la somme des quatre carrés, conduit à une équation supérieure au second degré.

Au contraire, si on donne la somme des quatre termes, et l'excès de la somme des carrès des extrêmes sur la somme des carrés des moyens, on détermine la somme des extrêmes et celle des moyens par une équation du premier degré. En effet, cet excès est égal à la différence des carrés de la somme des extrêmes et de la somme des moyens; c'est-à-dire, au produit de la somme donnée des quatre termes par l'excès de la somme des extrêmes sur la somme des moyens.

On connoît l'excès de la somme du premier et du troisième terme, sur la somme du second et du quatrième, et la somme des quatre carrès, ou l'excès de la somme des carrès du premier et du troisième sur la somme des carrès du second et du quatrième.

§ 227. *Prob.* Trouver six nombres en progression géométrique, en connoissant la somme des deux moyens $2s$, et la somme des deux extrêmes $2s'$.

Dén. Soit le produit des deux moyens, p; demi-différence des deux moyens, $\sqrt{(ss-p)}$; termes moyens, $s+\sqrt{(ss-p)}$, $s-\sqrt{(ss-p)}$.

$$2^{d},\ \frac{(s+\sqrt{(ss-p)})^2}{s-\sqrt{(ss-p)}}=\frac{(s+\sqrt{(ss-p)})^3}{p};\ 5^{me},\ \frac{(s-\sqrt{(ss-p)})^3}{p}.$$

$$1^{er},\ \frac{(s+\sqrt{(ss-p)})^3}{(s-\sqrt{(ss-p)})^2}=\frac{(s+\sqrt{(ss-p)})^5}{pp};\ 6^{me},\ \frac{(s-\sqrt{(ss-p)})^5}{pp}.$$

Somme des extrêmes, $\dfrac{2(16s^5-20s^3p+5spp)}{pp}$.

Cond. $\dfrac{16s^5-20s^3p+5spp}{pp}=s'$.

Réd. $16s^5-20s^3p+5spp=s'pp$.

1er. *Cas.* Soit $s'=5s$; $p=\frac{4}{5}ss$; $ss-p=\frac{1}{5}ss$; partant, les quantités cherchées sont nécessairement irrationnelles.

2^{d}. *Cas.* Soit $s'>5s$; $pp(s'-5s)+20s^3p=16s^5$;

$$p=ss\times\frac{\pm 2\sqrt{(s(4s'+5s))}-10s}{s'-5s}$$

$$ss-p=ss\times\frac{s'+5s\mp 2\sqrt{(s(4s'+5s))}}{s'-5s}.$$

Rem. 1re. La première valeur de p est toujours positive, et elle répond à la question dans le sens propre de l'énoncé. En effet,

$4s(4s'+5s)-100ss=4s(4s'-20s)=16s(s'-5s)$;

donc, dans la supposition $s'>5s, 2\sqrt{(s(4s'+5s))}>10s$.

La valeur correspondante de $ss-p$ est aussi positive ; en effet $(s'+5s)^2-4s(4s'+5s)=s's'-6ss'+5ss=(s'-s)(s'-5s)$; donc, dans la supposition $s'>5s$, $s'+5s>2\sqrt{(s(4s'+5s))}$.

Rem. 2de. La seconde valeur de p est négative, et partant les valeurs correspondantes soit des deux termes moyens, soit des deux termes extrêmes ont des signes opposés. La seconde solution répond donc à la question dans laquelle les quantités données sont les différences et non les sommes des quantités cherchées correspondantes.

Rem. 3me. Dans les formules du second cas soit supposé $s'=5s$. La première valeur de p paroît devenir $\frac{0}{0}$; cependant (1er. *Cas*), la valeur de p est déterminée. Pour obtenir cette valeur, soit substituée à la soustraction l'addition des termes du numérateur, en multipliant les deux termes de la fraction par $2\sqrt{(s(4s'+5s))}+10s$; on obtient,

$$p=\frac{16s(s'-5s)}{(s'-5s)(2\sqrt{(s(4s'+5s))}+10s)}ss$$

$$=\frac{8s}{\sqrt{(s(4s'+5s))}+5s}ss. \text{ Soit } s'=5s\,;\ p=\tfrac{4}{5}ss\,;$$

par ce changement, on a mis à découvert le facteur commun $s'-5s$ des deux termes de la fraction, qui dans le cas particulier $s'=5s$ évanouissent. Dans la même supposition $s'=5s$, la seconde solution est impossible.

3me. *Cas.* Soit $s'<5s$; on a $p=ss\times\frac{10s\mp2\sqrt{(s(4s'+5s))}}{5s-s'}$;

$$ss-p=ss\times\frac{-5s-s'\pm2\sqrt{(s(4s'+5s))}}{5s-s'}.$$

Rem. 1re. La seconde valeur de $ss-p$ est négative; et partant, les valeurs correspondantes des quantités cherchées sont imaginaires.

Rem. 2de. La première valeur de p est positive; en effet, $100ss-4s(4s'+5s)=16s(5s-s')$; et partant, lorsque $5s>s'$, $10s>2\sqrt{(s(4s'+5s))}$.

La valeur correspondante de $ss-p$ est positive, si on donne $s'>s$. En effet, $4s(4s'+5s)-(s'+5s)^2=6ss'-5ss-s's'=(s'-s)(5s-s')$; et partant, si on a en même tems $s'>s$, $s'<5s$, la première solution est réelle.

Scholie. Dans le second cas $s'>5s$; une des solutions répond à la question dans laquelle on donne, soit la différence des moyens, soit la différence des extrêmes. Partant, dans ce cas, les deux questions relatives l'une à deux

sommes, et l'autre à deux différences, sont liées entr'elles d'une manière si intime qu'on ne peut traiter d'une manière complète l'équation à laquelle conduit l'une ou l'autre de ces deux questions, sans résoudre en même tems chacune d'elles.

En appelant $2d$ et $2d'$, les différences données dans la seconde question, on obtient l'équation, $16d^5+20d^3p+5dpp=d'pp$; au lieu de l'équation $16s^5-20s^3p+5spp=s'pp$.

Ces deux équations ne diffèrent que par le signe de p; cependant le second problème diffère essentiellement du premier en ce que des trois suppositions qui se présentent, $d'=5d$, $d'>5d$, $d'<5d$, cette dernière est inadmissible, et donne pour les quantités cherchées des expressions imaginaires; d'où l'on obtient la proposition suivante, que je propose comme exercice de démonstration.

Théorème. Dans une progression géométrique de six termes, la différence des deux termes extrêmes est au moins quintuple de la différence des deux termes moyens. En général; dans une progression géométrique composée d'un nombre pair $2n$ de termes, la différence des deux termes extrêmes vaut au moins $2n-1$ fois la différence des deux termes moyens.

Aut. exercices, sur les progressions géométriques composées de six termes, a, b, c, d, e, f.

Connues.

$\frac{b+e}{a+f}; \frac{b-e}{a-f}; \frac{b+c+d+e}{a+f}; \frac{b-c-d+e}{a+f}; \frac{c+d}{a+b+e+f}; \frac{c+d}{a-b-e+f}$

Problème proposé comme exercice. Déterminer une progression géométrique, en connoissant, la somme de ses termes, la somme de leurs carrés, et la somme de leurs cubes.

La détermination du premier terme et du rapport de deux termes, dépend d'une équation du second degré; et la détermination du nombre des termes est réduite à une formule logarithmique.

Ex. Somme des termes	7,	31,	40.
Somme des carrés . . .	21,	341,	810.
Somme des cubes . . .	73,	4681,	20440.

§ 228. *Prob.* A donne à B autant de jetons que celui-ci en a déjà; B en rend à A autant que celui-ci en a gardés. Alors, les nombres des jetons de A et de B sont a et b respectivement : on demande les nombres de leurs jetons originairement.

	Jetons de A.	Jetons de B.
Dén. Originairement	x;	$a+b-x$
après le don de A	$2x-(a+b)$;	$2a+2b-2x$.
après le don de B	$4x-2(a+b)$.	

Cond. $4x-2(a+b)=a.$

Réd. $4x \qquad = 3a+2b.$

Sol. $x=\frac{3a+2b}{4}$; $a+b-x=\frac{a+2b}{4}.$

$2x-(a+b)=\frac{1}{2}a$; $2a+2b-2x=\frac{a+2b}{2}.$

$4x-2(a+b)= a.$

2°. Que ces joueurs fassent deux tours.

Les nombres originaires des jetons de A et de B se trouvent en substituant à a et à b, $\frac{3a+2b}{4}$ et $\frac{a+2b}{4}$ dans les formules précédentes. Or, $3\times\frac{3a+2b}{4}+2\times\frac{a+2b}{4}=\frac{11a+10b}{4}$;

et $\frac{3a+2b}{4}+2\times\frac{a+2b}{4}=\frac{5a+6b}{4}$; donc, on a,

jetons orig. de A, . . $\frac{11a+10b}{16}$; de B, $\frac{5a+6b}{16}$.

3°. Que ces joueurs fassent trois tours.

En substituant à a et à b dans les premières formules, $\frac{11a+10b}{16}$, et $\frac{5a+6b}{16}$: on trouve,

jetons originaires de A, $\frac{43a+42b}{64}$;

de B, $\frac{21a+22b}{64}$.

4°. Que ces joueurs fassent quatre tours.

Dans les premières formules, soit substitué à a, $\frac{43a+42b}{64}$; et à b, $\frac{21a+22b}{64}$;

on a, jetons originaires de A, $\frac{171a+170b}{256}$;

de B, $\frac{85a+86b}{256}$.

En omettant les dénominateurs des expressions des nombres originaires des jetons de A et de B, on a pour les numérateurs successifs.

Nomb. des tours,	pour A,	pour B.
1 . .	$3a+2b$ . .	$a+2b$
2 . .	$11a+10b$ . .	$5a+6b$
3 . .	$43a+42b$ . .	$21a+22b$
4 . .	$171a+170b$ . .	$85a+86b$.

En examinant ces expressions, on voit que dans les nombres des jetons de A les coefficiens 3, 11, 43, 171, de a sont tels, que chacun d'eux est plus petit d'une unité que le quadruple du précédent; et que les coefficiens de b dans les mêmes expressions sont les doubles des nombres 1, 5, 21, 85, tels que chacun d'eux surpasse d'une unité le quadruple du précédent; ensorte qu'on a :

$3 = 4 - 1$ $\qquad$ $1 = 1$

$11 = 16 - 4 - 1$ $\qquad$ $5 = 4 + 1$

$43 = 64 - 16 - 4 - 1$ $\qquad$ $21 = 16 + 4 + 1$

$171 = 256 - 64 - 16 - 4 - 1$ $\qquad$ $85 = 64 + 16 + 4 + 1.$

De là, on est porté à conclure, que les nombres des tours augmentant successivement d'une unité, les coefficiens de a et de b dans les expressions des jetons originaires de A seront tels qu'ils suit.

Tours, coefficiens de a coefficiens de b.

$$5 \ldots 4^5 - (4^4 \ldots + 1) = 4^5 - \frac{4^5 - 1}{3} = \frac{2.4^5 + 1}{3};\ 2(4^4 \ldots + 1) = 2 \times \frac{4^5 - 1}{3}$$

$$6 \ldots 4^6 - (4^5 \ldots + 1) = 4^6 - \frac{4^6 - 1}{3} = \frac{2.4^6 + 1}{3};\ 2(4^5 \ldots + 1) = 2 \times \frac{4^6 - 1}{3}$$

.
.
.

$$n \ldots 4^n - (4^{n-1} \ldots + 1) = 4^n - \frac{4^n - 1}{3} = \frac{2.4^n + 1}{3};\ 2(4^{n-1} \ldots + 1) = 2 \times \frac{4^n - 1}{3}.$$

On a donc, pour n tours : jetons originaires de

$$\text{A} \ldots \frac{2.4^n + 1}{3.4^n} a + 2.\frac{4^n - 1}{3.4^n} b;\ \text{de B} \ldots \frac{4^n + 1}{3.4^n} a + \frac{4^n + 2}{3.4^n} b.$$

Ces formules ont été tirées, par analogie seulement, des expressions des premiers termes. Pour prouver qu'elles sont généralement vraies, il faut prouver que si dans les expressions $\frac{3a + 2b}{4}$ et $\frac{a + 2b}{4}$ on substitue à a et à b, ces

dernières formules, on obtiendra des expressions conformes à elles, en substituant $n+1$ à n.

Or, $\frac{3(2.4^n+1)+2(4^n-1)}{3.4^n}=\frac{2.4^{n+1}+1}{3.4^n}$;

et $\frac{6(4^n-1)+2(4^n+2)}{3.4^n}=2.\frac{4^{n+1}-1}{3.4^n}$.

Donc, pour $n+1$ tours, on a,

jetons de A.... $\frac{2.4^{n+1}+1}{3.4^{n+1}}a+2.\frac{4^{n+1}-1}{3.4^{n+1}}b$;

jetons de B... $\frac{4^{n+1}-1}{3.4^{n+1}}a+\frac{4^{n+1}+2}{3.4^{n+1}}b$;

ainsi que cela doit être.

Aut. exerc. Chaque joueur donne à l'autre, la moitié, le tiers, le quart, ... la m^{me} partie des jetons de ce dernier; ou ces mêmes parties de ses propres jetons. *Item :* pour trois, quatre, cinq, ... n joueurs aux mêmes conditions.

Rem. Le développement général de cette question pour un nombre quelconque de tours, a été tiré par le raisonnement des formules relatives à un seul tour. Il est aisé d'obtenir ces formules pour ce cas par le simple raisonnement; et partant aussi on obtient par

le simple raisonnement la solution générale de la question.

En effet, à la fin du jeu A possède a jetons, après que le nombre des jetons qu'il avoit a été doublé; donc, avant ce doublement il avoit seulement $\frac{1}{2}a$; et partant B avoit $\frac{1}{2}a+b$: B possède $\frac{1}{2}a+b$ jetons après que leur nombre a été doublé; donc, avant ce doublement il avoit seulement $\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}b$; et partant, A avoit originairement $\frac{3}{4}a+\frac{1}{2}b$; ainsi que nous l'avons trouvé. Le même raisonnement s'applique aux autres exercices proposés.

Je vais appliquer la sommation des progressions géométriques, à celle de quelques suites qui en tirent leur origine, mais qui sont plus composées.

§ 229. Soit une progression géométrique et une progression arithmétique, par exemple, la suite des nombres naturels; soient multipliés les uns par les autres les termes correspondans de ces deux progressions: on demande la somme de ces produits. Soit,

$$s' = 1+2x+3x^2+4x^3+\ldots+(n-1)x^{n-2}+nx^{n-1}$$

$$s'x = \quad x+2x^2+3x^3+\ldots+(n-2)x^{n-2}+(n-1)x^{n-1}+nx^n.$$

1er. *Cas.*

1er. *Cas*. Soit $x>1$. Des membres de la seconde équation soient retranchés ceux de la première ; on obtient :

$$s'(x-1)=nx^n-(1+x+x^2+x^3+\ldots x^{n-1})=nx^n-\frac{x^n-1}{x-1}\ (\S\ 209)$$

$$s'=n\frac{x^n}{x-1}-\frac{x^n-1}{(x-1)^2}.$$

2^d^. *Cas*. Soit $x<1$. Des membres de la première équation soient retranchés ceux de la seconde ; on obtient :

$$s'(1-x)=(1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{n-1})-nx^n=\frac{1-x^n}{1-x}-nx^n$$

$$s'=\frac{1}{(1-x)^2}-\frac{x^n}{(1-x)^2}-n\frac{x^n}{1-x}.$$

3me. *Cas*. Soit $x=1$. Il paroît qu'on ne peut rien conclure pour ce cas, des formules relatives aux deux premiers cas : on pourroit même être porté à conclure faussement de l'un de ces cas au troisième.

En effet, si dans l'équation $s'(x-1)=nx^n-(1+x+x^2+\ldots x^{n-1})$, on mettoit à la place du soustrahende sa valeur n relative à la supposition $x=1$, on auroit $s'(x-1)=n(x^n-1)$; et $s'=n\frac{x^n-1}{x-1}=n\times n$ lorsque $x=1$ (§ 209) ; conclusion fausse,

puisque dans ce cas $s' = \frac{n(n+1)}{1.2}$ (§ 131).

Pour obtenir cette valeur de s' relative au troisième cas, soient converties les formules relatives aux deux premiers cas, en les exprimant, non dans x, mais, dans la différence de x à l'unité. Ainsi, dans les formules du premier cas soit fait $x = 1 + z$; de manière que

$$s' = n\frac{(1+z)^n}{z} - \frac{(1+z)^n - 1}{z^2}.$$

$$= \frac{n\left(1 + \frac{n}{1}z + \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}z^2 + \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}z^3 + \frac{n}{1}\cdots\frac{n-3}{4}z^4 + \ldots\right)}{z}$$

$$- \frac{\frac{n}{1}z + \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}z^2 + \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}z^3 + \frac{n}{1}\cdots\frac{n-3}{4}z^4 + \ldots}{z^2}$$

$$= \frac{\frac{n(n+1)}{1.2}z^2 + 2.\frac{n-1}{1}.\frac{n}{2}.\frac{n+1}{3}z^3 + 3.\frac{n-2}{1}\cdots\frac{n+1}{4}z^3 + \ldots}{z^2}$$

$$= \frac{n}{1}.\frac{n+1}{2} + 2.\frac{n-1}{1}.\frac{n}{2}.\frac{n+1}{3}z + 3.\frac{n-2}{1}\cdots\frac{n+1}{4}z^2 + \ldots$$

Or, lorsque $z = 0$, ou $x = 1$, cette formule est réduite à son premier terme, et on a pour ce cas $s' = \frac{n}{1}.\frac{n+1}{2}$, ainsi que cela doit être.

Dans l'expression $\frac{nx^n(x-1) - (x^n - 1)}{(x-1)^2}$; le

numérateur et le dénominateur ont constamment un diviseur commun $(x-1)^2$ qu'il a fallu faire disparoître pour obtenir la valeur de cette fraction dans le cas particulier où ce diviseur commun devient o^2.

Remarque 1re. Dans la supposition $x<1$, et $s'=\frac{1}{(1-x)^2}-\frac{x^n}{(1-x)^2}-\frac{nx^n}{1-x}$, le terme $\frac{x^n}{(1-x)^2}$ décroît, par l'augmentation de n, et peut devenir plus petit qu'aucune quantité assignée.

Le terme $\frac{nx^n}{1-x}$, croît par l'augmentation de n, en tant que n est coefficient de $\frac{x^n}{1-x}$, et il décroît par cette augmentation en tant que n est exposant de x; il paroît donc qu'on ne peut pas conclure immédiatement de l'augmentation de n à la diminution de ce terme. J'affirme, cependant, que ce terme peut aussi être rendu plus petit qu'aucune quantité assignée.

Pour cela, je remarque que deux valeurs successives de ce terme sont entr'elles comme n est à $(n+1)x$, ou comme 1 à $(1+\frac{1}{n})x$;

mais comme par l'augmentation de n la fraction $\frac{1}{n}$ peut devenir plus petite qu'aucune quantité assignée, le rapport de deux valeurs successives du terme $n\frac{x^n}{1-x}$ approche du rapport de 1 à x, d'autant plus que n est plus grande; et partant, les valeurs de ce terme approchent de former une progression géométrique d'autant plus que n est plus grande; et partant, le terme $\frac{nx^n}{1-x}$ peut aussi être rendu plus petit qu'aucune quantité assignée. Donc, dans la supposition $x<1$; $\frac{1}{(1-x)^2}$ est la limite de la somme de la progression proposée.

Rem. 2de. Soit réduite ensuite la fraction $\frac{1}{(1-x)^2}$.

$$\frac{1}{(1-x)^2}=1+\frac{2x-x^2}{(1-x)^2}.$$

$$\frac{2x-x^2}{(1-x)^2}=2x+\frac{3x^2-2x^3}{(1-x)^2}.$$

$$\frac{3x^2-2x^3}{(1-x)^2}=3x^2+\frac{4x^3-3x^4}{(1-x)^2}.$$

.

.

$$\frac{nx^{n-1}-(n-1)x^n}{(1-x)^2}=nx^{n-1}+\frac{(n+1)x^n-nx^{n+1}}{(1-x)^2}.$$

Partant, le développement de la fraction $\frac{1}{(1-x)^2}$ jusqu'au terme nx^{n-1}, diffère de la valeur de cette fraction, de la quantité $\frac{(n+1)x^n - nx^{n+1}}{(1-x)^2}$. Cette différence va en diminuant pour les valeurs de n un peu grandes, lorsque $x < 1$. Au contraire, lorsque $x > 1$, cette différence va continuellement en augmentant pour les valeurs de n, dans lequel cas elle est $-\frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n}{(x-1)^2}$; et on ne peut rien en conclure immédiatement pour la supposition $x = 1$.

§ 230. Soit de même :

$$s'' = 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + 15x^4 + \ldots\ldots \frac{n}{1}.\frac{n+1}{2} x^{n-1}$$

$$s''x = \quad x + 3x^2 + 6x^3 + 10x^4 + \ldots \frac{n-1}{1}.\frac{n}{2}.x^{n-1} + \frac{n}{1}.\frac{n+1}{2} x^n.$$

1er. *Cas.* $x > 1$; $s''(x-1) = \frac{n}{1}.\frac{n+1}{2} x^n - (1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 \ldots + nx^{n-1})$

$$= \frac{n}{1}.\frac{n+1}{2} x^n - s' = \frac{n}{1}.\frac{n+1}{2} x^n - n.\frac{x^n}{x-1} + \frac{x^n - 1}{(x-1)^2}.$$

$$s'' = \frac{n}{1}.\frac{n+1}{2}.\frac{x^n}{x-1} - \frac{n}{1}.\frac{x^n}{(x-1)^2} + \frac{x^n - 1}{(x-1)^3}.$$

2^d^. *Cas.* $x < 1$; $s'' = \frac{1-x^n}{(1-x)^3} - \frac{n}{1}.\frac{x^n}{(1-x)^2} - \frac{n}{1}.\frac{n+1}{2}.\frac{x^n}{1-x}.$

3me. *Cas.* $x=1$; on ne peut rien conclure immédiatement des formules des deux premiers cas; mais, il est nécessaire de chasser le facteur commun $(1-x)^3$ ou $(x-1)^3$, qui affecte les deux termes de la fraction à laquelle est égale la valeur de s'', quand on a réduit au même dénominateur les termes dont elle est composée; et on obtient par le même procédé que dans le § précédent, $s''=\frac{n}{1}\cdot\frac{n+1}{2}\cdot\frac{n+2}{3}$; ainsi que cela doit être.

Rem. Lorsque $x>1$, la valeur de s'' n'a aucune limite en grandeur.

Lorsque $x<1$, la limite de s'' est $\frac{1}{(1-x)^3}$; et on montre, tout comme dans le § précédent, la différence qui a lieu entre cette fraction et la somme des termes développés.

Je crois devoir me contenter de cette esquisse de l'application des progressions géométriques, à la sommation des suites dont les termes sont les produits des termes d'une progression géométrique et des nombres figurés. Le détail dans lequel je suis entré dans le §229 montre assez la marche à suivre dans les cas plus composés.

CHAPITRE XVII.

Sur la méthode des coefficiens indéterminés, et sur ses applications.

§231. LES *quantités constantes* ont une valeur déterminée ; et les *quantités variables* peuvent revêtir toutes sortes de valeurs. Ainsi dans un cercle déterminé, le rayon est constant ; mais la grandeur des perpendiculaires élevées à son diamètre jusqu'à la circonférence, et les distances de ces perpendiculaires au centre, sont variables.

On appelle *fonction* d'une quantité variable toute expression dans laquelle entre cette quantité. Une fonction entière d'une quantité variable est celle qui est composée seulement des puissances de cette variable à exposans entiers et positifs.

§232. *Théor.* Soient deux fonctions entières d'une quantité variable, égales entr'elles quelle que soit la valeur de la variable ; j'affirme que les coefficiens des puissances semblables

dans ces deux fonctions sont égaux entr'eux ; et partant, que tous les termes correspondans de ces deux fonctions, sont égaux entr'eux.

Soient A et B deux fonctions entières d'une quantité variable x, de manière que

$A=a+a'x+a''x^2+a'''x^3+\ldots$ et $B=b+b'x+b''x^2+b'''x^3+\ldots$

Que ces fonctions soient égales entr'elles quelle que soit la valeur de la variable x. J'affirme que les coefficiens des termes correspondans de ces deux fonctions sont égaux entr'eux.

En effet, les fonctions A et B étant égales entr'elles quelle que soit la valeur de x ; en particulier, elles sont égales entr'elles lorsque $x=0$; mais alors, ces deux fonctions sont réduites à leurs premiers termes a et b, donc $a=b$. Partant aussi, les sommes des termes qui suivent les premiers sont égales entre elles ; soient divisées ces deux sommes par x, on obtient $a'+a''x+a'''x^2+\ldots=b'+b''x+b'''x^2+\ldots$ De là, on obtient par le même raisonnement $a'=b'$, et successivement $a''=b''$, $a'''=b'''$, et ainsi de suite.

Corol. En particulier, soit une fonction entière d'une quantité variable égale à zéro quelle que soit la valeur de cette variable : les coefficiens de chacun de ses termes ou de chacune des puissances de la variable, sont zéro.

Les applications de ce principe vont en faire sentir l'importance.

§ 233. 1re. *Application relative à la sommation des puissances des nombres naturels.*

1°. Soit la suite des nombres naturels dont la multitude variable soit exprimée par n. J'affirme qu'on peut déterminer les coefficiens a et b, de manière que la fonction $an+bn^2$ de n soit égale à la somme de ces nombres quelle que soit la valeur de n.

Soit donc, $s.n=an+bn^2$. Puisque cette équation doit avoir lieu quelle que soit la valeur de n, elle doit avoir lieu pour une valeur de n supérieure d'une unité; et partant, on doit aussi avoir $s.(n+1)=a(n+1)+b(n+1)^2$. Des membres de la seconde équation soient retranchés les membres correspondans de la première, on aura $n+1=a+b(2n+1)$. Soient égalés entr'eux les coefficiens des puissances semblables, on obtient: $a+b=1$, $2b=1$; et de là, $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{2}$. Partant, $s.n=\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}n^2=\frac{n(n+1)}{1.2}$. conformément au § 131me.

2°. Soit la suite des nombres carrés dont la multitude variable soit exprimée par n. Déterminer, s'il est possible, les coefficiens a, b, c, de manière qu'on ait pour toute valeur de n : $s.n^2=an+bn^2+cn^3$.

Pour que cette équation ait toujours lieu, on doit aussi avoir :

$s.(n+1)^2 = a(n+1) + b(n+1)^2 + c(n+1)^3$. Des membres de la seconde équation soient retranchés les membres correspondans de la première, on obtient :

$(n+1)^2 = a + b(2n+1) + c(3nn+3n+1)$. Soient égalés les coefficiens des puissances semblables de n, on a les trois équations : $a+b+c=1$, $2b+3c=2$, $3c=1$; et de là on tire successivement, $c=\frac{1}{3}$, $b=\frac{1}{2}$, $a=\frac{1}{6}$; et partant,

$s.n^2 = \frac{1}{6}n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3 = \frac{n}{1}.\frac{n+1}{2}.\frac{2n+1}{3}$, conformément au § 141me.

3°. Soit la suite des nombres cubes dont la multitude variable soit exprimée par n. Déterminer s'il est possible les coefficiens a, b, c, d, de manière qu'on ait l'équation : $s.n^3 = an + bn^2 + cn^3 + dn^4$.

On aura de même :

$s(n+1)^3 = a(n+1) + b(n+1)^2 + c(n+1)^3 + d(n+1)^4$.

De là, $(n+1)^3 = a + b(2n+1) \begin{array}{l} +c(3nn+3n+1) \\ +d(4n^3+6n^2+4n+1) \end{array}$.

Soient égalés les coefficiens des puissances semblables de n, on obtient pour déterminer ces coefficiens quatre équations, desquelles on

tire successivement $d=\frac{1}{4}$, $c=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{4}$, $a=0$;

et partant, $s.n^3=\frac{1}{4}n^4+\frac{1}{2}n^3+\frac{1}{4}n^2=\left(\frac{n}{1}.\frac{n+1}{2}\right)^2$.

Cette expression trouvée analytiquement se démontre synthétiquement, en montrant que si elle est vraie pour quelque valeur de n elle est vraie pour la suivante; et comme elle est vraie pour les premières valeurs de n, 0, 1, 2,... elle sera vraie pour toutes les valeurs successives de n. Or,

$$\left(\frac{n}{1}.\frac{n+1}{2}\right)^2+(n+1)^3=(n+1)^2\left(\frac{nn}{4}+n+1\right)=\left(\frac{n+1}{1}.\frac{n+2}{2}\right)^2.$$

Rem. La somme des nombres cubes vient d'être trouvée égale au carré du nombre triangulaire correspondant. Mais (§ 131), un nombre carré est égal à la somme des nombres impairs correspondans; donc, la somme des nombres cubes est égale à la somme des nombres impairs à commencer depuis l'unité, et dont la multitude est exprimée par le nombre triangulaire correspondant. Donc aussi, chaque nombre cube est la somme de nombres impairs successifs, dont la place du plus grand est exprimée par le nombre triangulaire correspondant à la racine de ce cube, et dont la multitude est exprimée par cette racine.

Ex. $1^3=1$; $2^3=3+5$; $3^3=7+9+11$; $4^3=13+15+17+19$; $n^3=(n-1)n+1 \ldots n(n+1)-1$.

Le procedé suivi dans les trois sommations précédentes, s'applique évidemment à la sommation des puissances d'un même ordre des nombres naturels, et de là à la sommation des puissances des termes d'une progression arithmétique quelconque. On doit remarquer que les deux termes de la somme des m^{mes} puissances, qui contiennent les plus hautes puissances de n, sont de la forme an^{m+1} et bn^m;

et que $a=\dfrac{1}{m+1}$ et $b=\frac{1}{2}$.

§ 234. 2de. *Application relative à la réduction des puissances des nombres naturels aux nombres figurés des mêmes ordres.*

Nous avons vu (§ 131) qu'un nombre carré est la somme de deux nombres triangulaires successifs, dont l'un lui correspond, et l'autre le précède. J'affirme qu'un nombre cube est la somme des produits par des coefficiens constans de trois nombres pyramidaux successifs, dont le plus grand correspond à ce nombre cube ; en sorte qu'on peut avoir :

$n^3=a.\frac{n}{1}.\frac{n+1}{2}.\frac{n+2}{3}+b.\frac{n-1}{1}.\frac{n}{2}.\frac{n+1}{3}+c.\frac{n-2}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n}{3}$; a, b, c,

étant des coefficiens constans à déterminer.

Pour que cette équation ait toujours lieu, on doit avoir :

$$(n+1)^3=a\frac{n+1}{1}.\frac{n+2}{2}.\frac{n+3}{3}+b.\frac{n}{1}.\frac{n+1}{2}.\frac{n+2}{3}+c.\frac{n-1}{1}.\frac{n}{2}.\frac{n+1}{3}.$$

De là, $3nn+3n+1=a.\frac{n+1}{1}.\frac{n+2}{2}+b.\frac{n}{1}.\frac{n+1}{2}+c.\frac{n-1}{1}.\frac{n}{2};$

ou, $6nn+6n+2=nn(a+b+c)+n(3a+b-c)+(2a).$

De là, $a=1$, $b=4$, $c=1$; partant,

$$n^3=\frac{n}{1}.\frac{n+1}{2}.\frac{n+2}{3}.+4.\frac{n-1}{1}.\frac{n}{2}.\frac{n+1}{3}+\frac{n-2}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n}{3}.$$

ou, $3n^2=\frac{n+1}{1}.\frac{n+2}{2}+4.\frac{n-1}{1}.\frac{n+1}{2}+\frac{n-2}{1}.\frac{n-1}{2}.$

De là, $S.n^3=\frac{n}{1}\ldots\frac{n+3}{4}+4.\frac{n-1}{1}\ldots\frac{n+2}{4}+\frac{n-2}{1}\ldots\frac{n+1}{4}$

De même, soit :

$$n^4=a.\frac{n}{1}\ldots\frac{n+3}{4}+b.\frac{n-1}{1}\ldots\frac{n+2}{4}+c.\frac{n-2}{1}\ldots\frac{n+1}{4}+d.\frac{n-3}{1}\ldots\frac{n}{4}.$$

$$(n+1)^4=a.\frac{n+1}{1}..\frac{n+4}{4}+b.\frac{n}{1}..\frac{n+3}{4}+c.\frac{n-1}{1}..\frac{n+2}{4}+d.\frac{n-2}{1}..\frac{n+1}{4}.$$

$$4n^3+6n^2+4n+1=a.\frac{n+1}{1}..\frac{n+3}{3}+b.\frac{n}{1}..\frac{n+2}{3}+c.\frac{n-1}{1}..\frac{n+1}{3}+d.\frac{n-2}{1}..\frac{n}{3},$$

De là, on tire : $a=1$, $b=11$, $c=11$, $d=1$; et

$$n^4=\frac{n\ldots n+3}{1\ldots 4}+11.\frac{n-1}{1}\ldots\frac{n+2}{4}+11.\frac{n-2}{1}\ldots\frac{n+1}{4}+\frac{n-3}{1}\ldots\frac{n}{4}.$$

De là, $s.n^4=\frac{n}{1}..\frac{n+4}{5}+11.\frac{n-1}{1}..\frac{n+3}{5}+11.\frac{n-2}{1}..\frac{n+2}{5}+\frac{n-3}{1}..\frac{n+1}{5}.$

On voit que ce procédé peut être généralisé ; mais que la détermination des coefficiens des nombres figurés successifs est d'autant plus longue, que l'exposant des puissances à réduire dans les nombres figurés est plus considérable.

§235. 3me. *Application relative à la division.*

1er. *Ex.* Soit un dividende $xx-p'x+p''$; soit un diviseur $x-a$; soit le quotient $x-q'$. Produit du diviseur par le quotient : $xx-x(a+q')+aq'$. Soient égalés les termes correspondans du dividende et du produit : on obtient $a+q'=p'$; $aq'=p''$; de là, $q'=p'-a$; $aq'=ap'-aa=p''$; et partant, $aa-ap'+p''=0$; partant, pour que la division soit possible sans reste, on doit avoir $aa-ap'+p''=0$; et alors, $xx-p'x+p''=(x-a)(x-(p'-a))$.

2d. *Ex.* Dividende, $x^3-p'x^2+p''x-p'''$; diviseur $x-a$; soit le quotient $xx-q'x+q''$. Coefficiens des termes successifs du produit du diviseur par le quotient, $1, q'+a, q''+aq', aq''$.

Soient égalés ces coefficiens aux termes correspondans du dividende ; on obtient : $q=p'-a$; $q''=p''-aq'=p''-ap'+aa$; $aq''=p'''$, ou $a^3-aap'+ap''-p'''=0$. Partant, pour que la division ait lieu sans aucun reste, on

doit avoir, $a^3 - aap' + ap'' - p''' = 0$; et cette quantité est le dividende proposé, dans lequel on a mis a à la place de x.

3me. *Ex.* Dividende, $x^4 - p'x^3 + p''x^2 - p'''x + p^{IV}$; diviseur, $x - a$; soit le quotient $x^3 - q'x^2 + q''x - q'''$. On obtient de même : $q' = p' - a$; $q'' = p'' - ap' + aa$; $q''' = p''' - ap'' + a^2p' - a^3$; et pour que la division ait lieu sans aucun reste, on doit avoir $a^4 - p'a^3 + p''a^2 - p'''a + p^{IV} = 0$, en substituant a à la place de x dans le dividende proposé.

En général. Soit le dividende : $x^m - p'x^{m-1} + p''x^{m-2} \ldots \mp p^{M-1}x \pm p^M$; soit le diviseur $x - a$; soit le quotient : $x^{m-1} - q'x^{m-2} + q''x^{m-3} \ldots \pm q^{M-II}x \mp q^{M-1}$.

Soient égalés les termes du dividende aux termes correspondans du produit du diviseur par le quotient; on obtient les équations suivantes : $q' = p' - a$; $q'' = p'' - p'a + a^2$; $q''' = p''' - p''a + p'a^2 - a^3$; $q^{IV} = p^{IV} - p'''a + p''a^2 - p'a^3 + a^4$;
$q^{M-II} = p^{M-II} - p^{M-III}a + p^{M-IV}a^2 \ldots \mp p'a^{m-3} \pm a^{m-2}$
$q^{M-1} = p^{M-1} - p^{M-II}a + p^{M-III}a^2 \ldots \pm p''a^{m-3} \mp p'a^{m-2} \pm a^{m-1}$;
et pour que le quotient soit exact, on doit avoir : $aq^{M-1} = p^M$; ou
$a^m - p'a^{m-1} + p''a^{m-2} \ldots \mp p^{M-1}a \pm p^M = 0$; en substituant a à x dans le dividende proposé.

4me. *Ex.* Dividende, $x^3-p'x^2+p''x-p'''$; diviseur, $(x-a)^2$; soit le quotient $x-q'$: on trouve pour les coefficiens des termes successifs du produit du diviseur par le quotient, 1, $q'+2a$, $2aq'+aa$, aaq'. De là, $q'=p'-2a$; $3aa-2ap'+p''=0$; $2a^3-aap'+p'''=0$; partant, ces deux dernieres équations doivent avoir lieu en même tems pour que la division se fasse sans aucun reste; de la premiere équation, on tire : $a=\frac{p'\pm\sqrt{(p'^2-3p'')}}{3}$;

et de la seconde, on tire: $p'''=aa(p'-2a)$

$$=\left(\frac{p'\pm\sqrt{(p'^2-3p'')}}{3}\right)^2 \times \frac{p'\mp2\sqrt{(p'^2-3p'')}}{3}.$$

Soit $p'=7$, $p''=16$; on trouve $a=2$, $p'''=12$; et partant $x^3-7x^2+16x-12=(x-2)^2(x-3)$.

5me. *Ex.* Dividende, $x^4-p'x^3+p''x^2-p'''x+p^{IV}$; diviseur, $(x-a)^2$; soit le quotient $xx-q'x+q''$. Coefficiens des termes successifs du produit, 1, $q'+2a$, $q''+2aq'+aa$, $2aq''+aaq'$, aaq''. De là, on a les équations $q'=p'-2a$, $q''=p''-2ap'+3aa$; et pour que le quotient soit exact on doit avoir les deux équations: $4a^3-3aap'+2ap''-p'''=0$; $3a^4-2a^3p'+aap''-p^{IV}=0$.

On peut étendre ce procédé à des exemples de

de divisions plus composées, surtout quant à la complication du diviseur.

§ 236. 4me. *Application, relative à la décomposition des fractions dont le dénominateur a des facteurs, dans les fractions qui ont ces facteurs pour dénominateurs.*

1°. Soit $\frac{x+c}{(x-a)(x-b)}$ une fraction dont le dénominateur a pour facteurs deux binomes $x-a$, $x-b$; j'affirme qu'on peut déterminer les numérateurs A et B, de manière qu'on ait

$$\frac{x+c}{(x-a)(x-b)}=\frac{\text{A}}{x-a}+\frac{\text{B}}{x-b}.$$

En effet, pour que cette équation ait lieu, on doit avoir $x+c=\text{A}(x-b)+\text{B}(x-a)$; de là (§ 232); $\text{A}+\text{B}=1$, $b\text{A}+a\text{B}=-c$;

de là (§ 37), $\text{A}=\frac{a+c}{a-b}$; $\text{B}=-\frac{b+c}{a-b}$;

et $$\frac{x+c}{(x-a)(x-b)}=\frac{a+c}{a-b}\cdot\frac{1}{x-a}-\frac{b+c}{a-b}\cdot\frac{1}{x-b},$$

ainsi qu'il est aisé de le vérifier.

Rem. 1re. Le coefficient $\frac{a+c}{a-b}$ de la fraction $\frac{1}{x-a}$ se forme de la fraction proposée

$\frac{x+c}{(x-a)(x-b)}$, en substituant dans le facteur $\frac{x+c}{x-b}$ de cette dernière, a à x; et il en est de même pour la substitution de b à x dans la fraction qui a pour dénominateur $x-b$.

Rem. 2[de]. Lorsque $a=b$; et partant, lorsque la fraction proposée est $\frac{x+c}{(x-a)^2}$, les fractions particulières auxquelles donne lieu la décomposition générale, sont affectées du coefficient $\frac{1}{a-b}=\frac{1}{0}$; ce qui indique l'impossibilité de la décomposition de la fraction proposée.

Rem. 3[e]. $\frac{x}{(x-a)(x-b)}=\frac{x-a}{(x-a)(x-b)}+\frac{a}{(x-a)(x-b)}$ $=\frac{1}{x-b}+\frac{a}{(x-a)(x-b)}$; partant, on peut ramener la décomposition proposée lorsque le numérateur contient la variable x au cas où le numérateur est constant.

Rem. 4[me]. Les facteurs $x-a$, $x-b$, du dénominateur étant inégaux, la décomposition précédente est indépendante de la nature de ces facteurs; ils peuvent être rationnels ou irrationnels, réels ou imaginaires.

Rem. 5me. Soit proposée la fraction dont le dénominateur est le trinome $xx-p'x-p''$. Ce trinome a pour facteurs les binomes $x-\frac{1}{2}p'+\sqrt{(\frac{1}{4}p'^2+p'')}$, $x-\frac{1}{2}p'-\sqrt{(\frac{1}{4}p'^2+p'')}$; ces facteurs sont imaginaires, si p'' changeant de signe est plus grand que $\frac{1}{4}p'^2$; et partant, alors, les dénominateurs des fractions dans lesquelles la fraction proposée peut être décomposée sont imaginaires.

Rem. 6me. J'ai supposé que les dimensions de la variable dans le numérateur de la fraction proposée étoient moindres que sa plus haute dimension dans le dénominateur : si cela n'a pas lieu, on peut ramener ce cas au précédent. En effet, puisque

$$\frac{x}{(x-a)(x-b)}=\frac{a}{a-b}\cdot\frac{1}{x-a}-\frac{b}{a-b}\cdot\frac{1}{x-b},$$

$$\frac{xx}{(x-a)(x-b)}=\frac{a}{a-b}\cdot\frac{x}{x-a}-\frac{b}{a-b}\cdot\frac{x}{x-b}$$

$$=\frac{a}{a-b}\left(1+\frac{a}{x-a}\right)-\frac{b}{a-b}\left(1+\frac{b}{x-b}\right)$$

$$=1+\frac{aa}{a-b}\cdot\frac{1}{x-a}-\frac{bb}{a-b}\cdot\frac{1}{x-b}.$$

De même :

$$\frac{x^3}{(x-a)(x-b)}=x+\frac{aa}{a-b}(1+\frac{a}{x-a})-\frac{bb}{a-b}(1+\frac{b}{x-b})$$

$$=x+(a+b)+\frac{a^3}{a-b}\cdot\frac{1}{x-a}-\frac{b^3}{a-b}\cdot\frac{1}{x-b}.$$

$$\frac{x^4}{(x-a)(x-b)}=x^2+(a+b)x+\frac{a^3}{a-b}(1+\frac{a}{x-a})-\frac{b^3}{a-b}(1+\frac{b}{x-b})$$

$$=x^2+\frac{a^2-b^2}{a-b}x+\frac{a^3-b^3}{a-b}+\frac{a^4}{a-b}\cdot\frac{1}{x-a}-\frac{b^4}{a-b}\cdot\frac{1}{x-b}.$$

De même : $\frac{x^5}{(x-a)(x-b)}=x^3+\frac{a^2-b^2}{a-b}x^2+\frac{a^3-b^3}{a-b}x$

$$+\frac{a^4-b^4}{a-b}+\frac{a^5}{a-b}\cdot\frac{1}{x-a}-\frac{b^5}{a-b}\cdot\frac{1}{x-b}.$$

En général :

$$\frac{x^{n+2}}{(x-a)(x-b)}=x^n+\frac{a^2-b^2}{a-b}x^{n-1}\cdots+\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}$$

$$+\frac{a^{n+2}}{a-b}\cdot\frac{1}{x-a}-\frac{b^{n+2}}{a-b}\cdot\frac{1}{x-b}.$$

Ce qui vient d'être dit sur les fractions dont le dénominateur a deux facteurs binomes, peut conduire à la décomposition des fractions dont le dénominateur a un plus grand nombre de facteurs binomes.

Soit la fraction $\frac{1}{(x-a)(x-b)(x-c)}$; on demande celle des fractions dans lesquelles cette dernière peut être décomposée, qui a pour dénominateur le facteur $x-a$.

Puisque $\frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{1}{a-b}.\frac{1}{x-a} - \frac{1}{a-b}.\frac{1}{x-b}$;

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)(x-c)} = \frac{1}{a-b}.\frac{1}{x-a}.\frac{1}{x-c} - \frac{1}{a-b}.\frac{1}{x-b}.\frac{1}{x-c}.$$

Mais, $\frac{1}{x-a}.\frac{1}{x-c} = \frac{1}{a-c}.\frac{1}{x-a} - \frac{1}{a-c}.\frac{1}{x-c}$.

Donc, la fraction ayant pour dénominateur le facteur $x-a$ est $\frac{1}{(a-b)(a-c)}.\frac{1}{x-a}$; on a donc:

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)(x-c)} = \frac{1}{(a-b)(a-c)}.\frac{1}{x-a} + \frac{1}{(b-a)(b-c)}.\frac{1}{x-b}$$

$+ \frac{1}{(c-a)(c-b)}.\frac{1}{x-c}$. Si le numérateur de la fraction proposée est affecté d'une puissance x^m de x, le numérateur de la fraction ayant pour dénominateur $x-a$, sera affecté de la même puissance de a; et les fractions ayant pour dénominateurs les facteurs $x-b$, $x-c$, seront affectées des mêmes puissances de b et de c.

En général, que le dénominateur de la fraction proposée ait un facteur binome $x-a$, et pour l'autre facteur une fonction entière X de la variable x; la fraction ayant pour dénominateur $x-a$, aura un coefficient $\frac{1}{A}$; dans lequel A provient de X en y substituant a à x. Ainsi, soit la fraction

$\frac{1}{x-a} \times \frac{1}{xx+bx+bb}$; la fraction à laquelle donne lieu le facteur $x-a$ du dénominateur, est $\frac{1}{aa+ab+bb} \cdot \frac{1}{x-a}$. Et si le numérateur de la fraction proposée contient une puissance x^n de la variable, le numérateur de la fraction ayant le dénominateur $x-a$, contient la même puissance de a.

La destination de cet ouvrage ne me permet pas d'entrer dans de plus grands détails sur ce sujet, quelqu'important qu'il soit par la fréquence de ses applications dans les parties supérieures des mathématiques.

§ 237. 5me. *Application, relative au développement en suites des fractions dont le dénominateur est une fonction entière d'une quantité variable.*

Nous avons vu que le développement en suite de la fraction $\frac{1}{x-a}$ donne la suite géométrique $\frac{1}{x}+\frac{a}{x^2}+\frac{a^2}{x^3}+\ldots.$

Soit la fraction $\frac{1}{xx-p'x-p''}$ dont on demande le développement en suite.

Soit $\frac{1}{xx-p'x-p''}=\frac{1}{x^2}+\frac{a'}{x^3}+\frac{a''}{x^4}+\frac{a'''}{x^5}+\frac{a^{\text{IV}}}{x^6}+\ldots.$

Soient multipliés les deux membres de cette équation par $xx-p'x-p''$; et soient égalés les coefficiens des puissances semblables de x ; on aura la suite d'équations :

$a'-p'=0;$		$a'=p'$
$a''-a'p'-p''=0;$	de là ;	$a''=a'p'+p''$
$a'''-a''p'-a'p''=0$		$a'''=a''p'+a'p''$
$a^{\text{IV}}-a'''p'-a''p''=0$		$a^{\text{IV}}=a'''p'+a''p''$
. . . . . .		. . . . . .
. . . . . .		. . . . . .

Partant, chaque coefficient est la somme des produits des deux coefficiens précédens par les nombres donnés p' et p'' respectivement.

Ex. La suite qui provient du développement de la fraction $\frac{1}{1-x-x^2}$ est telle que cha-

que coefficient est la somme des deux qui le précèdent ; la suite de ces coefficiens est 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 . . . . . De même, la suite qui provient du développement de $\frac{1}{(1-x)^2}$ est telle que chaque coefficient est l'excès du double du précédent sur le pénultième ; ces coefficiens forment la suite des nombres naturels.

Rem. On peut exprimer chaque coefficient dans p' et dans p'' seulement ; conformément au tableau ci-joint. Soient regardés p' et p'' comme étant des quantités ayant une et deux dimensions respectivement : le coefficient a^{N} d'un terme x^n est la somme des produits de n dimensions faits avec les coefficiens p' et p'' ; chacun de ces produits étant répété un nombre de fois égal à celui des permutations dont sont susceptibles les lettres qui le composent.

$$a' = p'$$
$$a'' = p'^2 + p''$$
$$a''' = p'^3 + 2p'p''$$
$$a^{\text{IV}} = p'^4 + 3p'^2p'' + p''^2$$
$$a^{\text{V}} = p'^5 + 4p'^3p'' + 3p'p''^2$$
$$a^{\text{VI}} = p'^6 + 5p'^4p'' + 6p'^2p''^2 + p''^3$$

. . . .

Déf. On appelle *suites récurrentes*, les suites dans lesquelles chaque terme est la somme des produits d'un nombre constant des termes précédens par des nombres donnés. L'ordre d'une suite récurrente dépend du nombre des termes antérieurs desquels dépend chacun d'eux. Les progressions géométriques, qui proviennent du développement en suite des fractions dont les dénominateurs sont des binomes, sont des suites récurrentes du premier ordre. Les suites récurrentes dont chaque terme dépend des deux termes qui le précèdent, sont des suites récurrentes du second ordre, et elles proviennent du développement des fractions dont le dénominateur est un trinome. Les fractions dont les dénominateurs sont des quadrinomes, donnent lieu aux suites récurrentes du troisième ordre; et en général, les fractions dont les dénominateurs sont composés de $m+1$ termes, donnent lieu aux suites récurrentes du m^{me} ordre. Les nombres constans par lesquels on multiplie les termes qui précèdent le terme à obtenir, forment l'*échelle de relation* de la progression; et partant, l'échelle de relation étant connue, on connoît aussi la fraction du développement de laquelle la suite proposée tire son origine.

§ 238. Soit une suite récurrente du second ordre. Que le dénominateur de la fraction dont elle tire son origine soit le trinome $1-p'x-p''x^2$. Soit décomposé ce trinome dans ses facteurs binomes, qui sont $1-\frac{\sqrt{(p'^2+4p'')}+p'}{2}x$ et $1+\frac{\sqrt{(p'^2+4p'')}-p'}{2}x$; lesquels pour abréger soient désignés par $1-mx$ et $1-m'x$. On aura

$$\frac{1}{1-p'x-p''x^2}=\frac{m}{m-m'}\cdot\frac{1}{1-mx}-\frac{m'}{m-m'}\cdot\frac{1}{1-m'x}.$$

Mais, les fractions $\frac{1}{1-mx}$ et $\frac{1}{1-m'x}$ donnent par leur développement des progressions géométriques ; donc, les suites récurrentes du second ordre sont ramenées aux progressions géométriques. Le n^{me} terme de cette suite récurrente est $\frac{m^n-m'^n}{m-m'}x^{n-1}$.

1er. *Exemple*, relatif à des facteurs binomes rationnels. $\frac{1}{1-3x+2x^2}=\frac{1}{(1-x)(1-2x)}=\frac{2}{1-2x}-\frac{1}{1-x}$ terme général de la suite récurrente, $(2^n-1)x^{n-1}$.

2^d^. *Exemple*, relatif à deux facteurs binomes réels et irrationnels.

Soit la fraction dont le dénominateur est le trinome $1-x-x^2=(1-\frac{\sqrt{5}+1}{2}x)(1+\frac{\sqrt{5}-1}{2})x$;

donc, $\frac{1}{1-x-x^2}=\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{1-\frac{\sqrt{5}+1}{2}x}+\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{1+\frac{\sqrt{5}-1}{2}x}$.

Terme général $\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n\pm\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n\right\}x^{n-1}$.

3me. *Exemple*, relatif à deux facteurs binomes imaginaires.

$$\frac{1}{1-4x+5x^2}=\frac{1}{1-x(2+\sqrt{-1})}\cdot\frac{1}{1-x(2-\sqrt{-1})}$$

$$=\frac{2+\sqrt{-1}}{4}\cdot\frac{1}{1-x(2+\sqrt{-1})}+\frac{2-\sqrt{-1}}{4}\cdot\frac{1}{1-x(2-\sqrt{-1})}.$$

Le coefficient du n^{me} terme ou de x^{n-1} est $\frac{(2+\sqrt{-1})^n+(2-\sqrt{-1})^n}{4}$; et comme cette somme est réelle (§ 189), chacun des coefficiens est réel.

4e. *Ex.* $\frac{1}{1+4x+5x^2}=\frac{1}{1+x(2+\sqrt{-1})}\cdot\frac{1}{1+x(2-\sqrt{-1})}$

$$=\frac{2+\sqrt{-1}}{2\sqrt{-1}}\cdot\frac{1}{1+x(2+\sqrt{-1})}-\frac{2-\sqrt{-1}}{2\sqrt{-1}}\cdot\frac{1}{1+x(2-\sqrt{-1})};$$

coefficient du n^{me} terme ou de x^{n-1},

$$\frac{1}{2\sqrt{-1}}\left\{\pm(2+\sqrt{-1})^n\mp(2-\sqrt{-1})^n\right\}.$$

Si le dénominateur de la fraction proposée est composé de trois facteurs binomes, la fraction pourra se décomposer en trois autres ayant ces facteurs pour dénominateurs; et partant, une suite récurrente du troisième ordre, se décompose en trois suites géométriques: en général, le dénominateur de la fraction proposée étant composé de m facteurs binomes, la suite récurrente du m^{me} ordre se décompose en un pareil nombre de suites géométriques.

La destination de ces Elémens ne me permet pas d'entrer sur ce sujet dans de plus grands détails. Voyez entr'autres EULER, *Introductio ad Analysim infinitorum*; cap. XIII. Je crois cependant devoir dire un mot des suites récurrentes dont les dénominateurs sont des puissances d'un binome à exposans entiers et positifs, en commençant par la troisième, ayant déjà parlé de la suite provenue du développement de la fraction $\frac{1}{(1-x)^2}$.

Ex. 1r. $\frac{1}{(1-x)^3}=1+3x+6x^2+10x^3+15x^4+21x^5+\ldots$

Mais, $(1-x)^3=1-3x+3x^2-x^3$; donc, les nombres triangulaires ou les nombres figurés du second ordre forment une suite récur-

rente du troisième ordre dont l'échelle de relation est $+3, -3, +1$.

Que la fraction proposée ait le numérateur $a+bx+cx^2$. On peut déterminer les coefficiens a, b, c, de manière que la suite provenue du développement soit, par exemple, la suite des nombres carrés.

Pour cela, soit pris le produit de la suite précédente par $a+bx+cx^2$; les trois premiers termes du produit sont, a, $(3a+b)x$, $(6a+3b+c)x^2$; soient égalés les coefficiens a, $3a+b$, $6a+3b+c$, de ces trois termes aux trois premiers nombres carrés; de manière qu'on ait $a=1^2$, $3a+b=2^2$, $6a+3b+c=3^2$; on a $a=1$, $b=1$, $c=0$; et partant, la suite des nombres carrés provient du développement de la fraction $\frac{1+x}{(1-x)^3}$.

Ex. 2^d. Les nombres figurés du troisième ordre proviennent du développement de la fraction $\frac{1}{(1-x)^4}$; ils forment donc une suite récurrente du quatrième ordre dont l'échelle de relation est $+4, -6, +4, -1$. On peut déterminer le numérateur $a+bx+cx^2+dx^3$, de manière que la suite soit celle des nombres

cubes : on trouve que ce numérateur doit être $1+4x+x^2$.

Ex. 3me. Les nombres figurés du quatrième ordre proviennent du développement de la fraction $\frac{1}{1-x^5}$; ils forment une suite récurrente du cinquième ordre dont l'échelle de relation est $+5-10+10-5+1$; on peut déterminer le numérateur $a+bx+cx^2+dx^3+ex^4$, de manière qu'on ait pour le développement la suite des quatrièmes puissances ; on trouve $a=1$, $b=11$, $c=11$, $d=1$, $e=0$.

On peut étendre ces recherches aux nombres figurés et aux puissances de tous les ordres (voyez le § 234).

6me. *Application, relative au théorème binomial, pour un exposant quelconque.*

§ 238. Quoique la démonstration générale du théorème binomial développée dans le Chap. XIIIme. me paroisse ne rien laisser à désirer, soit à l'égard de la simplicité, soit à l'égard de l'exactitude, je crois cependant devoir montrer encore l'étendue des usages du principe exposé dans le § 232, en l'appliquant au développement d'une puissance d'un binome à exposant quelconque. D'ailleurs,

la marche que je suivrai dans cette application peut être regardée comme une introduction au chapitre suivant.

Pour éclaircir le procédé général, je crois devoir exposer aussi le cas où l'exposant est entier et positif.

Soit $(1+x)^n = 1+a'x+a''x^2+a'''x^3+a^{IV}x^4+a^{V}x^5+\dots$; donc

aussi $(1+z)^n = 1+a'z+a''z^2+a'''z^3+a^{IV}z^4+a^{V}z^5+\dots$; delà,

$(1+x)^n-(1+z)^n = a'(x-z)+a''(x^2-z^2)+a'''(x^3-z^3)+a^{IV}(x^4-z^4)+\dots$

Soient divisés les deux membres de cette équation par $x-z$; on aura :

$(1+x)^{n-1} \dots (1+z)^{n-1} = a'+a''(x+z)+a'''(x^2 \dots z^2)+a^{IV}(x^3 \dots z^3)+\dots$

Dans cette équation, indépendante des valeurs respectives de x et de z, soit $x=z$, on a :

$n(1+x)^{n-1} = a'+2a''x+3a'''x^2+4a^{IV}x^3+5a^{V}x^4+\dots$;

$n(1+x)^n = a'+(a'+2a'')x+(2a''+3a''')x^2+(3a'''+4a^{IV})x^3+\dots$

$= n(1+a'x + a''x^2 + a'''x^3+\dots)$

De là (§ 232), $a'=n$; $2a''=a'(n-1)$, $3a'''=a''(n-2)$, $4a^{IV}=a'''(n-3)\dots$; partant,

$a'=\frac{n}{1}$; $a''=\frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}$; $a'''=\frac{n}{1}\dots\frac{n-2}{3}$;

$a^{IV}=\frac{n}{1}\dots\frac{n-3}{4}$;... conformément au § 165.

2^d. *Cas.* Soit l'exposant un nombre fractionnaire positif $\frac{n}{m}$.

$$\text{Soit } (1+x)^{\frac{n}{m}}=1+a'x+a''x^2+a'''x^3+a^{IV}x^4+\ldots=X$$

$$(1+x)^n=(1+a'x+a''x^2+a'''x^3+a^{IV}x^4+\ldots)^m=X^m$$

$$(1+z)^n=(1+a'z+a''z^2+a'''z^3+a^{IV}z^4+\ldots)^m=Z^m$$

$$(1+x)^n-(1+z)^n=X^m-Z^m;\ \text{ou}$$

$$(x-z)((1+x)^{n-1}\ldots+(1+z)^{n-1})=(X-Z)(X^{m-1}\ldots+Z^{m-1})$$

$$=(x-z)(a'+a''(x+z)+a'''(x^2\ldots z^2)+a^{IV}(x^3\ldots z^3)+\ldots)(X^{m-1}\ldots Z^{m-1});$$

Soient divisés les deux membres de cette équation par $x-z$; et dans les quotiens soit fait $x=z$, on obtient :

$$n(1+x)^{n-1}=mX^{m-1}(a'+2a''x+3a'''x^2+4a^{IV}x^3+\ldots)$$

Multipliant les deux membres par $1+x$, et substituant à $(1+x)^n$ sa valeur X^m, on obtient:

$$nX=m(1+x)(a'+2a''x+3a'''x^2+4a^{IV}x^3+\ldots)$$

$$\text{ou},\quad n(1+a'x+a''x^2+a'''x^3+a^{IV}x^4+\ldots)$$

$$=m(a'+(a'+2a'')x+(2a''+3a''')x^2+(3a'''+4a^{IV})x^3+\ldots)$$

De

De là, $a' = \frac{n}{m}$; $2a'' = a'(\frac{n}{m} - 1)$, $3a''' = a''(\frac{n}{m} - 2)$,

$4a^{IV} = a'''(\frac{n}{m} - 3)$. . . . conformément au § 178.

3me. *Cas*. Soit,

$$\frac{1}{(1+x)^n} = (1+x)^{-n} = 1 + a'x + a''x^2 + a'''x^3 + a^{IV}x^4 + \ldots$$

$$\frac{1}{(1+z)^n} = (1+z)^{-n} = 1 + a'z + a''z^2 + a'''z^3 + a^{IV}z^4 + \ldots$$

$$\frac{1}{(1+x)^n} - \frac{1}{(1+z)^n} = -(x-z)\frac{(1+x)^{n-1} \ldots (1+z)^{n-1}}{(1+x)^n(1+z)^n}$$

$$= (x-z)(a' + a''(x+z) + a'''(x^2 \ldots z^2) + a^{IV}(x^3 \ldots z^3) + \ldots$$

Soient divisés les deux membres de cette équation par $x-z$, et dans les quotiens soit fait $x=z$, on obtient :

$$-\frac{n}{(1+x)^{n+1}} = a' + 2a''x + 3a'''x^2 + 4a^{IV}x^3 + \ldots\ldots$$

$$-\frac{n}{(1+x)^n} = a' + (a'+2a'')x + (2a''+3a''')x^2 + (3a'''+4a^{IV})x^3 + \ldots$$

$$= -n(1 + a'x \quad + \quad a''x^2 \quad + \quad a'''x^3 + \ldots)$$

De là ; $a' = -n$; $2a'' = -a'(n+1)$, $3a''' = -a''(n+2)$; $4a^{IV} = -a'''(n+3)$. . . ; conformément au § 179.

4me. *Cas*. Soit l'exposant un nombre négatif

et fractionnaire ; ou soit la formule $\frac{1}{(1+x)^{\frac{n}{m}}}$.

Ce cas se démontre d'après le troisième cas, de la même manière que le second cas a été démontré d'après le premier.

§ 239. Le procédé qui vient d'être développé s'applique avec succès au développement d'une puissance d'un polynome.

Soit $X^n = (1+p'x+p''x^2+p'''x^3+p^{IV}x^4+\ldots)^n$

$$=1+a'x+a''x^2+a'''x^3+a^{IV}x^4+\ldots\ldots$$

$$Z^n = (1+p'z+p''z^2+p'''z^3+p^{IV}z^4+\ldots\ldots)^n$$

$$=1+a'z+a''z^2+a'''z+a^{IV}z^4+\ldots\ldots$$

$$X^n-Z^n=(x-z)(a'+a''(x+z)+a'''(x^2..z^2)^n+a^{IV}(x^3\ldots z^3)+\ldots$$

$$=(x-z)(p'+p''(x+z)+p'''(x^2\ldots z^2)+p^{IV}(x^3\ldots z^3)(X^{n-1}\ldots+Z^{n-1}).$$

Soient divisés les deux membres par $x-z$, et dans les quotiens, soit fait $x=z$; on a :

$$a'+2a''x+3a'''x^2+4a^{IV}x^3+\ldots\ldots$$
$$=nX^{n-1}(p'+2p''x+3p'''x^2+4p^{IV}x^3+\ldots\ldots)$$
$$(a'+2a''x+3a'''x^2+4a^{IV}x^3+\ldots\ldots)$$
$$(1+p'x+p''x^2+p'''x^3+\ldots\ldots)$$
$$=n(1+a'x+a''x^2+a'''x^3+\ldots\ldots)$$
$$(p'+2p''x+3p'''x^2+4p^{IV}x^3+\ldots\ldots)$$

Coefficiens.

Termes	dans le 1[er]. memb.	dans le 2[d]. memb.
x^0	$\ldots np'$	a'
x'	$\ldots n(a'p'+2p'')$	$a'p'+2a''$
x^2	$\ldots n(a''p'+2a'p''+3p''')$	$a'p''+2a''p'+3a'''$
x^3	$\ldots n(a'''p'+2a''p''+3a'p'''+4p^{IV})$	$a'p'''+2a''p''+3a'''p'+4a^{IV}$
	. . . .	. . . .

De là, on tire successivement :

$$a' = np'$$
$$2a'' = a'p'(n-1)+2np''$$
$$3a''' = a''p'(n-2)+a'p''(2n-1)+3np'''$$
$$4a^{IV} = a'''p'(n-3)+a''p''(2n-2)+a'p'''(3n-1)+4np^{IV}$$
$$5a^{V} = a^{IV}p'(n-4)+a'''p''(2n-3)+a''p'''(3n-2)+a'p^{IV}(4n-1)+5np^{V}$$

. . . .

On obtient ensuite immédiatement chaque coefficient

$a', a'', a''', a^{IV}, a^{V} \ldots$ dans n et dans les coefficiens

$p', p''; p''', p^{IV}, p^{V} \ldots$ suivant une loi régulière. On trouve :

$$a' = np'$$
$$a'' = \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}p'^2+np''$$
$$a''' = \frac{n}{1}\cdots\frac{n-2}{3}p'^3+2.\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}p'p''+np'''$$
$$a^{IV} = \frac{n}{1}\cdots\frac{n-3}{4}p'^4+3.\frac{n}{1}\cdots\frac{n-2}{3}p'^2p''+2.\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}p'p'''+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}p''^2+np^{IV}$$

. . . .

. . . .

Le cas où tous les coefficiens p', p'', p''', p^{IV}, sont égaux à l'unité, de manière que le polynome est composé des termes de la progression géométrique, 1, x, x^2, x^3, x^4,... et où n est un nombre entier et positif, se distingue par sa simplicité. Il sert de base à la détermination générale des manières d'amener des points donnés avec des dés donnés.

CHAPITRE XVIII.

Calcul des Tables logarithmiques.

DANS le chapitre XVme, nous avons admis les tables logarithmiques comme calculées, et nous avons appris à en faire usage. Le procédé que je vais développer pour exécuter ces calculs est beaucoup plus abrégé que celui qui a été employé par les premiers calculateurs des logarithmes : ils n'étoient pas en possession des moyens qui sont dus aux progrès des modernes dans les calculs appelés supérieurs ; mais dont on peut les dégager comme il suit.

§ 240. Puisque le logarithme de l'unité est zéro : log. $(1+x)$ évanouit lorsque $x=0$; et partant, si ce logarithme peut être ramené à une fonction entière de x, il est de la forme $ax+bx^2+cx^3+dx^4+\ldots$. Soit donc :

$$\text{log.}(1+x) = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \ldots \text{ aussi}$$
$$\text{log.}(1+z) = az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + \ldots \text{ de là ;}$$
$$\text{log.}(1+x) - \text{log.}1+z = a(x-z) + b(x^2-z^2) + c(x^3-z^3) + d(x^4-z^4) + \ldots$$
$$= \text{log.}\frac{1+x}{1+z}\left(=1+\frac{x-z}{1+z}\right) = a\left(\frac{x-z}{1+z}\right) + b\left(\frac{x-z}{1+z}\right)^2 + c\left(\frac{x-z}{1+z}\right)^3 + d\left(\frac{x-z}{1+z}\right)^4$$

Soient divisés les deux membres de cette équation par $x-z$, on a :

$$a \quad +b(x+z)+c(x^2+xz+z^2)+d(x^3+\ldots z^3)+\ldots$$

$$=a.\frac{1}{1+z}+b.\frac{x-z}{(1+z)^2}+c.\frac{(x-z)^2}{(1+z)^3}+d.\frac{(x-z)^3}{(1+z)^4}+\ldots$$

Cette équation a lieu pour toutes les valeurs de x et de z ; donc, en particulier, elle a lieu lorsque $x=z$; et alors elle devient :

$$a+2bx+3cx^2+4dx^3+\ldots\ldots=a\,\frac{1}{1+x}$$

$=a(1-x+x^2-x^3+x^4-\ldots)$. Soient égalés terme à terme les coefficiens des puissances semblables de x (§ 232) ; les deux premiers termes sont déjà égaux entr'eux, et partant, le coefficient a est indéterminé, et les coefficiens suivans sont déterminés en a par les équations, $2b=-a$, $3c=+a$, $4d=-a$, $5e=+a\ldots$: on a donc:

$$\log.1+x= a(x-\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{3}x^3-\tfrac{1}{4}x^4+\tfrac{1}{5}x^5-\tfrac{1}{6}x^6+\ldots).$$

Delà, $\log.1-x=-a(x+\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{3}x^3+\tfrac{1}{4}x^4+\tfrac{1}{5}x^5+\tfrac{1}{6}x^6+\ldots)$

$$\log.1-xx=-a(\quad x^2 \quad +\tfrac{1}{2}x^4 \quad +\tfrac{1}{3}x^6+\ldots)$$

$$\log.\frac{1+x}{1-x}=2a(x \quad +\tfrac{1}{3}x^3 \quad +\tfrac{1}{5}x^5+\ldots\ldots).$$

Rem. 1re. Les formules précédentes sont tirées de la conversion en suite de la fraction $\frac{1}{1+x}$. Comme cette conversion est légitime, ou que la suite qui en provient approche de

la valeur de $\frac{1}{1+x}$, seulement lorsque $x<1$; je vais prouver que cela a toujours lieu, lorsqu'on calcule le logarithme d'un nombre plus grand que l'unité, par la formule log. $\frac{1+x}{1-x}$.

En effet, soit $\frac{1+x}{1-x}=n$; en supposant $n>1$; de la proportion $1+x:1-x=n:1$, on tire: $1:x=n+1:n-1$, et $x=\frac{n-1}{n+1}$, fraction proprement dite.

Rem. 2[de]. Le logarithme d'un même nombre dépend du coefficient indéterminé a indépendant de ce nombre lui-même, et de la suite à laquelle il sert de coefficient, et qui dépend de ce nombre. Un même nombre a donc un nombre illimité de logarithmes, suivant les différentes valeurs de a. Si on calcule les logarithmes de tous les nombres pour une même valeur de a, on dit que ces logarithmes appartiennent à un même *système logarithmique*, dont a est appelé le *module*. La supposition la plus simple consiste à faire $a=1$. Les logarithmes correspondans à cette supposition sont appelés *logarithmes naturels*: je vais d'abord m'occuper de ces logarithmes,

je montrerai ensuite comment on peut, par leur moyen, calculer les logarithmes relatifs à un système quelconque, et en particulier les logarithmes tabulaires.

§ 241. 1[er]. *Exemp.* On demande le logarithme de 2; soit $\frac{1+x}{1-x}=2$, $x=\frac{1}{3}$.

$x\ =0,333\,333\,3$	$x\ =0,333\,333\,3$
$x^3\ =0,037\,037\,0$	$\frac{1}{3}x^3\ =0,012\,345\,7$
$x^5\ =0,004\,115\,2$	$\frac{1}{5}x^5\ =0,000\,823\,0$
$x^7\ =0,000\,457\,2$	$\frac{1}{7}x^7\ =0,000\,065\,3$
$x^9\ =0,000\,050\,8$	$\frac{1}{9}x^9\ =0,000\,005\,6$
$x^{11}=0,000\,005\,6$	$\frac{1}{11}x^{11}=0,000\,000\,5$
$x^{13}=0,000\,000\,6$	$\log.2=2(0,346\,573\,4)=0,693\,146\,8.$

Ce calcul est exact jusqu'au 6[me]. caractère qui doit être 7.

2[d]. *Exemple.* Soit $\frac{1+x}{1-x}=3$, $x=\frac{1}{2}$.

$x\ =0,500\,000\,0$	$x\ =0,500\,000\,0$
$x^3\ =0,125\,000\,0$	$\frac{1}{3}x^3\ =0,041\,666\,7$
$x^5\ =0,031\,250\,0$	$\frac{1}{5}x^5\ =0,006\,250\,0$
$x^7\ =0,007\,812\,5$	$\frac{1}{7}x^7\ =0,001\,116\,1$
$x^9\ =0,001\,953\,1$	$\frac{1}{9}x^9\ =0,000\,217\,0$
$x^{11}=0,000\,488\,3$	$\frac{1}{11}x^{11}=0,000\,044\,4$
$x^{13}=0,000\,122\,1$	$\frac{1}{13}x^{13}=0,000\,009\,4$
$x^{15}=0,000\,030\,5$	$\frac{1}{15}x^{15}=0,000\,002\,0$
$x^{17}=0,000\,007\,6$	$\frac{1}{17}x^{17}=0,000\,000\,4$
$x^{19}=0,000\,001\,9$	$\log.3=2.0,549\,305\,8=1,098\,611\,6.$

Ce calcul est aussi exact jusqu'au 6me. caractère qui doit être 2.

Plus le nombre proposé n, dont on calcule le logarithme est grand, plus la quantité fractionnaire $\frac{n-1}{n+1}$ ou x approche d'être l'unité; partant, moins la suite qui exprime le logarithme de n est convergente, et plus il faut en prendre de termes pour obtenir un même degré d'exactitude. Aussi, la suite logarithmique de $\frac{1+x}{1-x}$, n'est-elle commodément applicable que pour les nombres mixtes compris entre 1 et 2; et c'est du calcul des logarithmes de ces nombres fractionnaires qu'il convient de tirer les logarithmes des nombres entiers. Je vais, comme exemple, calculer les logarithmes de 2 et de 3, au moyen des logarithmes des nombres $1\frac{1}{2}$ et $1\frac{1}{3}$, ou $\frac{3}{2}$ et $\frac{4}{3}$.

3me. *Exemp.* Soit $\frac{1+x}{1-x}=\frac{3}{2}$, $x=\frac{1}{5}$.

$x\ =0,2$	$x\ =0,2$
$x^3=0,008$	$\frac{1}{3}x^3=0,002\,666\,666\,7$
$x^5=0,000\,32$	$\frac{1}{5}x^5=0,000\,064\,000\,0$
$x^7=0,000\,012\,8$	$\frac{1}{7}x^7=0,000\,001\,828\,6$
$x^9=0,000\,000\,512$	$\frac{1}{9}x^9=0,000\,000\,056\,9$
$x^{11}=0,000\,000\,020\,5$	$\frac{1}{11}x^{11}=0,000\,000\,001\,9$

$$\log.\tfrac{3}{2}=2\times0,202\,732\,554\,1$$
$$=0,405\,465\,108\,2.$$

4me. *Exemp.* Soit $\dfrac{1+x}{1-x}=\frac{4}{3}$, $x=\frac{1}{7}$.

$x=0,142\,857\,142\,9$	$x=0,142\,857\,142\,9$
$x^3=0,002\,915\,451\,9$	$\frac{1}{3}x^3=0,000\,971\,817\,3$
$x^5=0,000\,059\,499\,0$	$\frac{1}{5}x^5=0,000\,011\,900\,0$
$x^7=0,000\,001\,214\,3$	$\frac{1}{7}x^7=0,000\,000\,173\,5$
$x^9=0,000\,000\,024\,8$	$\frac{1}{9}x^9=0,000\,000\,002\,7$
	$\log.\frac{4}{3}=2\times0,143\,841\,036\,4$
	$=0,287\,682\,072\,8.$

Application. Soit l le log. $\frac{3}{2}$, et l' le log. $\frac{4}{3}$.

$\log.3-\log.2=l$ $\quad\log.2=l+l'=0,693\,147\,181\,2$

$-\log.3+2\log.2=l'$ $\quad\log.3=2l+l'=1,098\,612\,896\,6.$

Ayant les logarithmes de 2 et de 3, on aura les logarithmes de leurs puissances et ceux de tous les nombres qui n'ont aucun facteur premier que 2 et 3.

Plus la fraction $\dfrac{1+x}{1-x}$ approche d'être égale à l'unité, plus x est petite ; de là, plus la suite qui exprime le log. $\dfrac{1+x}{1-x}$ est convergente, et moins il faut en prendre de termes pour obtenir un même degré d'exactitude.

Comme un exemple de la manière dont on peut calculer simultanément les logarithmes de plusieurs nombres premiers, je vais calculer les logarithmes des trois nombres premiers 2, 3, 5, au moyen des fractions $\frac{16}{15}$, $\frac{25}{24}$, $\frac{81}{80}$.

$$\log.\tfrac{16}{15} = 4\log.2 - \log.3 - \log.5.$$
$$\log.\tfrac{25}{24} = -3\log.2 - \log.3 + 2\log.5.$$
$$\log.\tfrac{81}{80} = -4\log.2 + 4\log.3 - \log.5.$$

De là,
$$\log.2 = 7\log.\tfrac{16}{15} + 5\log.\tfrac{25}{24} + 3\log.\tfrac{81}{80}.$$
$$\log.3 = 11\log.\tfrac{16}{15} + 8\log.\tfrac{25}{24} + 5\log.\tfrac{81}{80}.$$
$$\log.5 = 16\log.\tfrac{16}{15} + 12\log.\tfrac{25}{24} + 7\log.\tfrac{81}{80}.$$

Soit poussée l'exactitude dans chaque chaque division jusqu'au dixième caractère décimal, pour être assuré que les résultats sont exacts dans le huitième caractère, on trouve :

en faisant, $x = \frac{1}{31}$, $\log.\frac{16}{15} = 0{,}064\,538\,5211$.
$x = \frac{1}{49}$, $\log.\frac{25}{24} = 0{,}040\,821\,9945$
$x = \frac{1}{161}$, $\log.\frac{81}{80} = 0{,}012\,422\,5200$

De là, $\log.2 = 0{,}693\,147\,18$
$\log.3 = 1{,}098\,612\,29.$
$\log.5 = 1{,}609\,437\,91$
donc, $\log.10 = 2{,}302\,585\,09$

Quand on a calculé les logarithmes des trois nombres 2, 3, 5, et partant, les logarithmes des puissances de ces nombres et de leurs produits entr'elles, on peut obtenir promptement les logarithmes des nombres premiers suivans, en employant seulement le premier terme, ou tout au plus les deux premiers termes de la suite logarithmique de $\frac{1+x}{1-x}$.

Je vais éclaircir cette assertion par les logarithmes des huit nombres premiers qui suivent les précédens.

1°. $7^4 = 2401 = 2400 . \frac{2401}{2400}$; $x = \frac{1}{4801}$.
2°. $11^2 = 121 = 120 . \frac{121}{120}$; $x = \frac{1}{241}$.
3°. $25.13 = 325 = 324 . \frac{325}{324}$; $x = \frac{1}{649}$.
4°. $17^2 = 289 = 288 . \frac{289}{288}$; $x = \frac{1}{577}$.
5°. $19^2 = 361 = 360 . \frac{361}{360}$; $x = \frac{1}{721}$.
6°. $23.25 = 575 = 576 : \frac{576}{575}$; $x = \frac{1}{1151}$.
7°. $31^2 = 30.32 + 1 = 960 . \frac{961}{960}$; $x = \frac{1}{1921}$.
8°. $29.31 = 899 = 900 : \frac{900}{899}$; $x = \frac{1}{1799}$.

§ 242. Soient $n-1$, n, $n+1$, trois nombres naturels successifs; $nn = \frac{nn-1}{1-\frac{1}{nn}} = \frac{(n-1)(n+1)}{1-\frac{1}{nn}}$;

$$\log. n = \frac{\log. n-1 + \log. n+1}{2} - \tfrac{1}{2}\log. 1 - \frac{1}{nn}.$$

$$= \frac{\log. n-1 + \log. n+1}{2} + a\left(\frac{1}{nn} + \tfrac{1}{2}.\frac{1}{n^4} + \tfrac{1}{3}.\frac{1}{n^6} + \tfrac{1}{4}.\frac{1}{n^8} + \ldots\right)$$

Pour peu que n soit grand, par exemple, au-dessus de 100, la valeur de $\frac{1}{n^4}$ est inférieure à $\frac{1}{100\,000\,000}$; et à plus forte raison, son produit par a est inférieur à $\frac{1}{100\,000\,000}$; partant, le second terme $\tfrac{1}{2}a.\frac{1}{n^4}$ n'influe pas sur le degré d'exactitude dont on s'est con-

tenté dans les tables : on a donc sensiblement,

$$\log. n = \frac{\log. n-1 + \log. n+1}{2} + \frac{1}{nn} a.$$

Soit $n > 10\,000$; $\frac{1}{nn} < \frac{1}{100\,000\,000}$; et à plus forte raison $a \times \frac{1}{nn} < \frac{1}{100\,000\,000}$; on aura au moins dans le degré d'exactitude des tables,

$$\log. n = \frac{\log. n-1 + \log. n+1}{2}$$; et partant, de même que n est moyen arithmétique entre les deux nombres naturels $n-1$ et $n+1$, entre lesquels il est situé, aussi le logarithme de n est sensiblement moyen arithmétique entre les logarithmes de ces deux nombres. Il suit de là, que lorsque des nombres naturels sont grands, et en particulier au-dessus de 10000; les logarithmes de plusieurs de ces nombres successifs forment aussi sensiblement une progression arithméthique; partant, les différences des logarithmes de deux de ces nombres sont sensiblement proportionnelles aux différences de ces nombres. Cette propriété, est la base de la construction et des usages des tables proportionnelles, dont nous avons parlé § 201.

Quand on a calculé les logarithmes des nombres premiers jusqu'à un certain terme, on

peut aussi obtenir promptement le logarithme du nombre premier suivant. En effet, n étant un nombre premier, les nombres $n-1$ et $n+1$, entre lesquels il est situé, sont des nombres pairs, et partant, des multiples des nombres premiers dont on suppose connoître les logarithmes; on déterminera donc promptement le logarithme de n dans les logarithmes de $n-1$ et de $n+1$, par l'équation

$$n^2 = (nn-1)\frac{nn}{nn-1} \text{ qui donne } x = \frac{1}{2nn-1}.$$

Je me contente de cette légère esquisse de la manière dont on peut calculer les logarithmes des nombres premiers, et partant aussi, ceux des nombres composés. On a imaginé des procédés très expéditifs pour calculer à un haut degré d'exactitude les logarithmes des grands nombres (1); mais je ne crois pas devoir entrer dans ces détails.

§ 243. Soit a le module du système des logarithmes tabulaires, dans lequel le logarithme de 10 est 1; on a, log. tab. $10 = a$ log. nat. 10, ou, $1 = a \times 2{,}302\,585\,09$; $a = \frac{1}{2{,}302\,585\,09}$

(1) Voyez en particulier les profondes recherches de Mr. le Prof. BERTRAND : *Développement nouveau de la partie élémentaire des mathématiques.*

$=\frac{100\,000\,000}{230\,258\,509}=0,434\,29448$. C'est là le module du système tabulaire, ou le nombre par lequel on doit multiplier les logarithmes naturels pour obtenir les logarithmes tabulaires.

Le module tabulaire étant déterminé, on pourroit construire immédiatement les logarithmes tabulaires. En multipliant ce module par x, c'est-à-dire, en le divisant par le dénominateur de la fraction (ayant pour numérateur l'unité) qui exprime la valeur de x, on obtient le premier terme de la suite à laquelle est égal le logarithme de $\frac{1+x}{1-x}$; et on obtient les termes suivans en opérant sur ce premier terme et sur les quotiens successifs de la même manière qu'on a opéré dans la supposition du module égal à l'unité.

Ex. Soit $\frac{1+x}{1-x}=\frac{5}{2}$; ou $x=\frac{1}{5}$.

$a\times x\ =\frac{1}{5}a\ =0,086\,858\,896$ $\quad ax\ =0,086\,858\,896$
$a\times x^3=\frac{1}{25}ax\ =0,003\,474\,356$ $\quad \frac{1}{3}ax^3=0,001\,158\,119$
$a\times x^5=\frac{1}{25}ax^3=0,000\,138\,974$ $\quad \frac{1}{5}ax^5=0,000\,027\,795$
$a\times x^7=\frac{1}{25}ax^5=0,000\,005\,559$ $\quad \frac{1}{7}ax^7=0,000\,000\,794$
$a\times x^9=\frac{1}{25}ax^7=0,000\,000\,222$ $\quad \frac{1}{9}ax^9=0,000\,000\,025$
$a\times x^{11}=\frac{1}{25}ax^9=0,000\,000\,009$ $\quad \frac{1}{11}ax^{11}=0,000\,000\,001$

log. tab. $\frac{5}{2}=2\times0,088\,045\,630$
$=0,176\,091\,260$.

On a en effet dans les tables, log. $\frac{5}{2}=0,176\,091\,3$.

§ 244. Après avoir développé la question, un nombre étant donné, trouver son logarithme; je passe à la question inverse, un logarithme étant donné trouver le nombre qui lui correspond. Cette question trouve dans les élémens des applications moins fréquentes que la précédente; mais son importance dans les parties supérieures des mathématiques m'engage à la faire entrer dans ces élémens.

Soit e le nombre dont on regarde tous les nombres comme étant des puissances, de manière qu'un nombre proposé soit une puissance e^x de ce nombre. Comme $e^x=1$ lorsque $x=0$; si e^x est une fonction entière de x, on a:

$$e^x=1+ax+bx^2+cx^3+dx^4+\ldots\ldots$$
$$e^z=1+az+bz^2+cz^3+dz^4+\ldots\ldots$$

$$e^x-e^z=a(x-z)+b(x^2-z^2)+c(x^3-z^3)+d(x^4-z^4)+\ldots$$
$$=e^z(e^{x-z}-1)=e^z\left\{a(x-z)+b(x-z)^2+c(x-z)^3+d(x-z)^4+\right\}\ldots$$

Soient divisés les deux membres par $x-z$, on obtient,

$$a+b(x+z)+c(x^2+xz+z^2)+d(x^3\ldots\ldots z^3)+\ldots\ldots$$
$$=e^z(a+b(x-z)+c(x-z)^2+d(x-z)^3+\ldots)$$

Cette équation est indépendante des valeurs respectives de x et de z; donc, en particulier elle a lieu lorsque $x=z$.

Alors,

Alors, $a+2bx+3cx^2+4dx^3+\ldots\ldots=a\times ez$
$=a(1+ax+bx^2+cx^3+\ldots\ldots)$

Soient égalés terme à terme les coefficiens des puissances semblables, on obtient a quantité indéterminée, dans laquelle les coefficiens suivans sont exprimés, comme il suit :

$$2b=a^2,\quad b=\frac{1}{1.2}a^2$$

$$3c=ab,\quad c=\frac{1}{1.2.3}a^3$$

$$4d=ac,\quad d=\frac{1}{1.2.3.4}a^4$$

. . . .

. . . .

Partant, $e^x=1+ax+\frac{a}{1.2}x^2+\frac{a^3}{1.2.3}x^3+\frac{a^4}{1\ldots.4}x^4+\ldots$

Soit $a=1$; $e^x=1+x+\frac{1}{1.2}x^2+\frac{1}{1.2.3}x^3+\frac{1}{1\ldots.4}x^4+\ldots.$

$a=1$; $x=1$; $e=1+1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1\ldots.4}+\ldots.$

Le nombre e est appelé la *base du système logarithmique* dont on s'occupe, en tant qu'un nombre quelconque est regardé comme étant une puissance de ce nombre : le système correspondant à la supposition $a=1$, est le système naturel ; sa base est donc :

$1+1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\ldots$ Comme son usage est très fréquent dans les calculs supérieurs aux élémens, je vais développer son expression, en poussant l'exactitude jusqu'à neuf ou dix caractères.

$$\frac{1}{1.2}=0,5$$
$$\frac{1}{1.2.3}=0,166\,666\,666\,7$$
$$\frac{1}{1\ldots4}=0,041\,666\,666\,7$$
$$\frac{1}{1\ldots5}=0,008\,333\,333\,3$$
$$\frac{1}{1\ldots6}=0,001\,388\,888\,9$$
$$\frac{1}{1\ldots7}=0,000\,198\,412\,7$$
$$\frac{1}{1\ldots8}=0,000\,024\,801\,6$$
$$\frac{1}{1\ldots9}=0,000\,002\,755\,7$$
$$\frac{1}{1\ldots10}=0,000\,000\,275\,6$$
$$\frac{1}{1\ldots11}=0,000\,000\,025\,0$$
$$\frac{1}{1\ldots12}=0,000\,000\,002\,1$$
$$\frac{1}{1\ldots13}=0,000\,000\,000\,2$$
$$e=2,718\,281\,828\,5$$

§ 244. La question sur la nature des logarithmes des quantités négatives a été agitée par les mathématiciens les plus célèbres; jusqu'à ce qu'EULER ait levé toute incertitude à cet égard. Comme elle peut être décidée par

l'application des formules développées dans ce chapitre, je crois devoir faire cette application.

Dans la formule :

$$\log.\frac{1+x}{1-x}=2(x+\tfrac{1}{3}x+\tfrac{1}{5}x^5+\tfrac{1}{7}x^7+\ldots)\text{ soit } x=z\sqrt{-1};$$

$$\log.\frac{1+z\sqrt{-1}}{1-z\sqrt{-1}}=2\sqrt{-1}(z-\tfrac{1}{3}z^3+\tfrac{1}{5}z^5-\tfrac{1}{7}z^7+\ldots).\text{ Soit } z=1$$

$$\log.\frac{1+\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}}=2\sqrt{-1}(1-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{7}+\ldots)$$

Mais, $\frac{1+\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}}=\frac{(1+\sqrt{-1})^2}{2}=\sqrt{-1};$

donc, $\log.\sqrt{-1}=2\sqrt{-1}(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots..)$
et $\log.-1=2\log.\sqrt{-1}=4\sqrt{-1}(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots)$.
Partant, $\log.-1$ est affecté du facteur imaginaire $\sqrt{-1}$; donc, ce logarithme est impossible.

§ 245. $\frac{1+z\sqrt{-1}}{1-z\sqrt{-1}}=\frac{(1+z\sqrt{-1})^2}{1+zz}=\frac{1-zz+2z\sqrt{-1}}{1+zz}$

$$=\frac{1-zz}{1+zz}\left(1+\frac{2z\sqrt{-1}}{1-zz}\right);\text{ donc,}$$

$$\log.\frac{1+z\sqrt{-1}}{1-z\sqrt{-1}}=\log.\frac{1-zz}{1+zz}+\log.1+\frac{2z\sqrt{-1}}{1-zz};$$

$$\text{et}\log.1+\frac{2z\sqrt{-1}}{1-zz}=\log.\frac{1+zz}{1-zz}+\log.\frac{1+z\sqrt{-1}}{1-z\sqrt{-1}}.$$

$$=\log.\frac{1+zz}{1-zz}+2\sqrt{-1}(z-\tfrac{1}{3}z^3+\tfrac{1}{5}z^5-\tfrac{1}{7}z^7+\ldots).$$

Soit $a+b\sqrt{-1}=a(1+\frac{b}{a}\sqrt{-1})$ une quantité imaginaire proposée. Soit fait $\frac{b}{a}=\frac{2z}{1-zz}$;

et partant, $z=\frac{\sqrt{(aa+bb)}-a}{b}$, et $\frac{1+zz}{1-zz}=\frac{\sqrt{(aa+bb)}}{a}$;

on aura : $\log.(a+b\sqrt{-1})=\log.\sqrt{(aa+bb)}$

$$+2\sqrt{-1}\left\{\begin{array}{l}\frac{\sqrt{(aa+bb)}-a}{b}-\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{(aa+bb)}-a}{b}\right)^3\\+\frac{1}{5}\left(\frac{\sqrt{(aa+bb)}-a}{b}\right)^5-\frac{1}{7}\left(\frac{\sqrt{(aa+bb)}-a}{b}\right)^7\end{array}\right\}$$

. . . .

Or (§ 187), toute quantité imaginaire (indépendante des logarithmes) est reductible à la forme $a+b\sqrt{-1}$; donc aussi le logarithme d'une quantité imaginaire est une quantité imaginaire qui dépend seulement de $\sqrt{-1}$.

Remarque 1re. On prouve que la suite $z-\frac{1}{3}z^3+\frac{1}{5}z^5-\frac{1}{7}z^7+\ldots$ est la valeur d'un arc de cercle dont la tangente est z dans un cercle dont le rayon est l'unité.

Rem. 2de. Lorsqu'on fait $\frac{1+x}{1-x}=-n$; on obtient $x=\frac{n+1}{n-1}$, et partant, $x>1$. Donc, alors le développement de la fraction $\frac{1}{1+x}$

en suite, donne une suite divergente; et la suite $x+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{7}x^7+\ldots$ est aussi divergente, ou dès son origine, ou après quelques-uns de ses termes. Partant, on ne peut rien en conclure pour la valeur de log. $\frac{1+x}{1-x}$ ou pour log.—*n*. On ne peut donc pas appliquer immédiatement les formules logarithmiques aux logarithmes des quantités négatives.

§ 246. Je vais appuyer ce qui précède sur les logarithmes des quantités négatives, par des considérations tirées de la nature de ces quantités et de celle des logarihtmes.

On ne peut pas dire qu'il existe un rapport entre les quantités dites positives et les quantités dites négatives.

Deux quantités sont appelées de même nature ou de même espèce, lorsque l'une peut être répétée assez souvent pour surpasser l'autre. Or, quelque nombre de fois qu'on répète (dans le sens propre de cette expression) une quantité négative; c'est-à-dire, quelque nombre de fois qu'on l'ajoute à elle-même, on ne peut ni égaler ni surpasser une quantité positive; partant, les quantités ainsi appelées positives et négatives, sont des quantités d'espèces différentes. Or, la comparaison

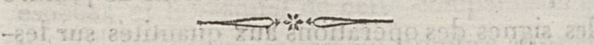
de deux quantités pour savoir combien de fois l'une contient l'autre, ne peut avoir lieu, qu'autant que ces deux quantités sont de même espèce; et le résultat de cette comparaison ou l'exposant du rapport est un nombre abstrait, et partant positif. Donc, les quantités ainsi nommées positives et négatives sont telles, qu'elles ne peuvent pas être comparées les unes avec les autres, ou qu'elles n'ont pas de rapport les unes aux autres. Mais, les logarithmes sont les mesures des rapports (§ 199); donc, les logarithmes des quantités dites négatives n'existent pas, ou sont impossibles.

Lorsqu'on a pris le rapport de 1 à $+e$ pour le rapport fondamental d'un système logarithmique, et qu'on prend les rapports successifs de e à e^2 de e^2 à e^3, de e^3 à e^4 ... de e^{n-1} à e^n tous égaux à celui de 1 à e pour composer le rapport de 1 à e^n, on ne peut introduire dans cette suite de rapports que des quantités du même signe que e et partant positives. Ainsi, dans un système logarithmique, on ne peut pas assigner le nombre des rapports égaux au rapport fondamental, qu'on doit prendre comme composans, pour produire comme composé le rapport de l'unité à une quantité négative.

Toutes les opérations de l'arithmétique se ramènent à l'addition et à la soustraction. Quoique, pour la commodité des calculs, il ait pu convenir aux mathématiciens de joindre les signes des opérations aux quantités sur lesquelles ils doivent les exécuter, on ne sauroit regarder comme composant deux classes distinctes de quantités les combinaisons des quantités abstraites avec les signes des opérations à exécuter sur elles.

Dans les questions qui peuvent donner lieu au changement de signes des quantités cherchées, on n'est jamais appelé à comparer entr'elles que les quantités précédées d'un même signe; en sorte que, si l'un des deux termes d'un rapport change de signe, l'autre change en même tems de signe (voyez, par exemple, § 30, *Rem.* 1re et 2de). Toutes les quantités, considérées abstraitement, sont positives, et ce n'est que relativement à leurs applications, à leur influence dans les relations sociales, et relativement aux êtres intelligens qui s'en occupent, qu'elles changent de signe, et elles sont appelées négatives, par opposition au point de vue sous lequel elles sont appelées positives.

CHAPITRE XIX.



Sur les fractions continues.

§ 247. UNE fraction continue est une expression fractionnaire dont le dénominateur est un nombre mixte ; tel, que le dénominateur de sa partie fractionnaire est aussi un nombre mixte ; de manière que la partie fractionnaire de ce dernier a aussi pour dénominateur un nombre mixte; et ainsi de suite. Nous nous occuperons seulement des fractions continues dont les numérateurs successifs sont l'unité ; soit parce que ce sont celles qui se présentent le plus souvent, soit parce qu'il est aisé d'y ramener les autres. En conséquence, nous pouvons représenter ces fractions conformément au tableau ci-joint, a, b, c, d, e, étant supposés des nombres entiers.

$$\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e+\ldots\ldots}}}}}$$

§ 248. On peut toujours réduire une fraction vulgaire en fraction continue. En effet, soient divisés les deux termes de la fraction proposée par son numérateur; s'il n'entre pas un nombre entier de fois dans le dénominateur, le dénominateur de la fraction égale à la première, réduite à avoir pour numérateur l'unité, sera composé d'une partie entière qui est le quotient de la division du premier dénominateur par son numérateur, et d'une partie fractionnaire qui est le reste divisé par le premiér numérateur. On réduira de même cette partie fractionnaire à avoir pour numérateur l'unité, en procédant sur elle de la même manière que sur la première, et on continuera de procéder ainsi jusqu'à ce qu'il n'y ait aucun reste. La fraction vulgaire proposée sera ainsi réduite en une fraction continue terminée.

Il suit de là, que le procédé par lequel on cherche le plus grand diviseur commun des deux termes d'une fraction, est aussi celui qu'on doit employer pour réduire cette fraction en fraction continue. Les dénominateurs successifs de la fraction continue sont les quotiens qu'on obtient en exécutant la première opération.

$$Ex. = \frac{421}{972} = \frac{1}{\frac{972}{421}} = \frac{1}{2+\frac{130}{421}}; \quad \frac{130}{421} = \frac{1}{\frac{421}{130}} = \frac{1}{3+\frac{31}{130}};$$

$$\frac{31}{130} = \frac{1}{\frac{130}{31}} = \frac{1}{4+\frac{6}{31}}; \quad \frac{6}{31} = \frac{1}{\frac{31}{6}} = \frac{1}{5+\frac{1}{6}}.$$

$$\frac{421}{972} = \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{6}}}}}.$$

Les dénominateurs successifs, 2, 3, 4, 5, 6, sont les quotiens qu'on obtient quand on fait sur les nombres 421 et 972 l'opération par laquelle on recherche leur plus grand diviseur commun.

§ 249. *Réciproquement.* Une fraction continue étant proposée, on peut la réduire en fraction vulgaire.

Ainsi, soit calculée la fraction continue précédente jusqu'à son premier dénominateur 2, on obtient $\frac{1}{2}$. Cette fraction calculée jusqu'à son second dénonominateur 3, donne $\frac{3}{7}$. Cette fraction calculée jusqu'à son troisième dénominateur 4, donne $\frac{1}{2+\frac{4}{13}} = \frac{13}{30}$. Cette fraction calculée jusqu'au quatrième dénominateur 5, donne $\frac{1}{2+\frac{21}{68}} = \frac{68}{157}$. Enfin, la fraction entière est $\frac{1}{2+\frac{130}{421}} = \frac{421}{972}$.

Pour saisir la loi suivant laquelle procèdent les fractions vulgaires provenues d'une fraction continue, soient désignés par $q, q', q'', q''' \ldots . q^{N-II}, q^{N-I}, q^{N}$, les dénominateurs successifs de la fraction continue, et soient $\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}, \frac{a''}{b''}, \frac{a'''}{b'''} \ldots \frac{a^{N-II}}{b^{N-II}}, \frac{a^{N-I}}{b^{N-I}}, \frac{a^{N}}{b^{N}}$,

les fractions vulgaires successives provenues de cette fraction réduite jusqu'à ces dénominateurs respectivement. On a,

$$\frac{a}{b}=\frac{1}{q};\ \frac{a'}{b'}=\frac{q'}{qq'+1};\ \frac{a''}{b''}=\frac{q'q''+1}{qq'q''+q''+q}$$
$$=\frac{a'q''+1}{b'q''+b};\ \frac{a'''}{b'''}=\frac{a''q'''+a'}{b''q'''+b'}.$$

Dans ces fractions, les premières de celles qui proviennent de la réduction de la fraction continue, les termes des deux dernières sont respectivement les produits des termes correspondans de la fraction précédente, par le dénominateur correspondant de la fraction continue, augmentés des termes correspondans de la fraction vulgaire pénultième. Pour prouver que cette loi a toujours lieu ; je vais prouver que si elle a lieu pour une quelconque des fractions, elle a lieu aussi pour la suivante.

Soit donc, $\frac{a^{N}}{b^{N}} = \frac{q^{N}a^{N-I}+a^{N-II}}{q^{N}b^{N-I}+b^{N-II}}$;

j'affirme que, $\frac{a^{N+I}}{b^{N+I}} = \frac{q^{N+I}a^{N}+a^{N-I}}{q^{N+I}b^{N}+b^{N-I}}$.

En effet, la fraction $\frac{a^{N}}{b^{N}}$ devient la fraction $\frac{a^{N+I}}{b^{N+I}}$ lorsque dans la première on substitue à q^{N}, $q^{N}+\frac{1}{q^{N+I}}$.

Partant, $\frac{a^{N+1}}{b^{N+1}} = \frac{(q^{N}+\frac{1}{q^{N+I}})a^{N-I}+a^{N-II}}{(q^{N}+\frac{1}{q^{N+I}})b^{N-I}+b^{N-II}}$

$$= \frac{a^{N}+\frac{1}{q^{N+1}}a^{N-I}}{b^{N}+\frac{1}{q^{N+1}}b^{N-1}} = \frac{q^{N+1}a^{N}+a^{N-1}}{q^{N+1}b^{N}+b^{N-1}}$$

Partant, la loi de formation étant supposée vraie jusqu'à la fraction répondante à un certain dénominateur de la fraction continue, elle est vraie pour la fraction suivante; et partant, pour toute la suite de ces fractions. Pour rendre cette loi applicable même aux deux premiers termes de la suite, on a cou-

tume de la faire précéder des deux symboles fractionnaires $\frac{1}{0}$, $\frac{0}{1}$.

§ 250. Soient prises les différences de deux fractions successives ; $\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}, \frac{a''}{b''}, \frac{a'''}{b'''} \ldots\ldots$

On a, $\frac{a}{b} - \frac{a'}{b'} = \frac{1}{b} - \frac{q}{qb+1} = + \frac{1}{bb'}$; $\frac{a'}{b'} - \frac{a''}{b''}$
$= \frac{a'}{b'} - \frac{q'a'+a}{q'b'+b} = - \frac{1}{b'b''}$; $\frac{a''}{b''} - \frac{a'''}{b'''}$
$= \frac{a''}{b''} - \frac{a''q'''+a'}{b''q'''+b'} = + \frac{1}{b''b'''} \ldots$ En général, qu'on ait démontré que $\frac{a^{N-1}}{b^{N-1}} - \frac{a^N}{b^N} = \pm \frac{1}{b^{N-1}b^N}$;
j'affirme que $\frac{a^N}{b^N} - \frac{a^{N+1}}{b^{N+1}} = \mp \frac{1}{b^N b^{N+1}}$. En effet,

$$\frac{a^N}{b^N} - \frac{a^{N+1}}{b^{N+1}} = \frac{a^N}{b^N} - \frac{a^N q^{N+1} + a^{N-1}}{b^N q^{N+1} + b^{N-1}} = (\text{supp.}) \mp \frac{1}{b^N b^{N+1}}.$$

Savoir, la différence de deux fractions vulgaires successives provenues d'une fraction continue, est égale à une fraction ayant l'unité pour numérateur, et ayant pour dénominateur le produit de leurs dénominateurs, cette différence étant alternativement en plus et en moins. Chacune des fractions qui occupent des

places paires, est plus petite que chacune des deux fractions entre lesquelles elle est située; et partant, au contraire, chacune des fractions qui occupent des places impaires, est plus grande que les deux fractions entre lesquelles elle est située.

Ex. Soient les dénominateurs successifs de la fraction continue, 2, 3, 4, 5, 6. Les fractions vulgaires qui en proviennent sont $\frac{1}{2}, \frac{3}{7}, \frac{13}{30}, \frac{68}{157}, \frac{421}{972}$. On a, $\frac{1}{2}-\frac{3}{7}=+\frac{1}{2\cdot7}$; $\frac{3}{7}-\frac{13}{30}=-\frac{1}{7\cdot30}$; $\frac{13}{30}-\frac{68}{157}=+\frac{1}{30\cdot157}$; $\frac{68}{157}-\frac{421}{972}=-\frac{1}{157\cdot972}$.

§ 249. *Corol.* 1er. Chacune des fractions vulgaires provenues d'une fraction continue, est réduite à ses moindres termes.

Cor. 2^d^. Deux fractions vulgaires successives provenues d'une fraction continue, ont leurs termes correspondans premiers entr'eux.

Cor. 3me. La différence de deux fractions vulgaires successives, provenues d'une fraction continue, est moindre que la différence de l'une d'elles, à une fraction composée de termes respectivement plus petits que ceux de l'autre (sans avoir égard au signe de cette différence). A plus forte raison, cette différence est plus petite que celle de deux fractions composées de termes respectivement plus petits que les leurs.

Cor. 4me. Soient $\frac{a^{N-1}}{b^{N-1}}$ et $\frac{a^N}{b^N}$ deux fractions successives, provenues d'une fraction continue; on a : $a^{N-1}b^N - a^N b^{N-1} = \pm 1$. Partant, deux nombres premiers entr'eux a^N et b^N étant proposés, on détermine des multiples de ces deux nombres qui diffèrent entr'eux d'une unité.

Scholie. Dans le chapitre Vme. §§ 55—57, nous sommes parvenus au même résultat, par un procédé qui paroît différent de celui des fractions continues; mais il est aisé de montrer leur analogie, puisqu'ils ont l'un et l'autre pour base la recherche du plus grand diviseur commun des deux nombres dont on cherche les multiples ayant la différence proposée, et qu'on fait des opérations semblables sur les élémens dont cette base est composée.

§ 250. Puisqu'on a la suite d'équations :

$$\frac{a}{b} - \frac{a'}{b'} = +\frac{1}{bb'}; \frac{a'}{b'} - \frac{a''}{b''} = -\frac{1}{b'b''}; \frac{a''}{b''} - \frac{a'''}{b'''} = +\frac{1}{b''b'''} \ldots$$

$\frac{a^{N-1}}{b^{N-1}} - \frac{a^N}{b^N} = \pm \frac{1}{b^{N-1}b^N}$: on détermine la différence de cette dernière fraction, à l'une quelconque des précédentes, en une suite de fractions précédées des signes alternatifs + et —, ayant pour numérateur l'unité, et ayant

pour dénominateurs les produits des dénominateurs de deux fractions successives.

Ainsi, dans l'exemple du § 248, puisque

$$\frac{1}{2}-\frac{3}{7}=\frac{1}{2.7};\ \frac{3}{7}-\frac{13}{30}=-\frac{1}{7.30};\ \frac{13}{30}-\frac{68}{157}=+\frac{1}{30.157};$$

$$\frac{68}{157}-\frac{421}{972}=-\frac{1}{157.972};\ \text{on a},\ \frac{13}{30}-\frac{421}{972}=\frac{1}{30.157}-\frac{1}{157.972};$$

$$\frac{421}{972}-\frac{3}{7}=\frac{1}{7.30}-\frac{1}{30.157}+\frac{1}{157.972}.$$

$$\frac{1}{2}-\frac{421}{972}=\frac{1}{2.7}-\frac{1}{7.30}+\frac{1}{30.157}-\frac{1}{157.972}.$$

En général, $\frac{a^{\text{N}}}{b^{\text{N}}}-\frac{a^{\text{N}+\text{M}}}{b^{\text{N}+\text{M}}}$

$$=\pm\frac{1}{b^{\text{N}}b^{\text{N}+\text{I}}}\mp\frac{1}{b^{\text{N}+\text{I}}b^{\text{N}+\text{II}}}\dots\pm\frac{1}{b^{\text{N}+\text{M-I}}\,b^{\text{N}+\text{M}}}.$$

§ 251. On peut aussi exprimer cette différence d'une manière plus commode, en introduisant les restes qu'on obtient par la recherche du plus grand diviseur commun des deux termes de la fraction à réduire en fraction continue.

Soient ces restes successifs, $r, r', r'', r''' . r^{\text{N-II}}, r^{\text{N-I}}$.

On a, $\frac{a^{\text{N}}}{b^{\text{N}}}=\cfrac{1}{q+\cfrac{r}{a^{\text{N}}}}$; $\frac{r}{a^{\text{N}}}=\cfrac{1}{q'+\cfrac{r'}{r}}$;

$\frac{r''}{r'}$

$$\frac{r'}{r}=\frac{1}{q''+\frac{r''}{r'}}\ldots\ldots\frac{r^{\mathrm{M}-1}}{r^{\mathrm{M}-\mathrm{II}}}=\frac{1}{q^{\mathrm{M}}+\frac{r^{\mathrm{M}}}{r^{\mathrm{M}-1}}};$$

$$\frac{a^{\mathrm{M}}}{b^{\mathrm{M}}}=\frac{q^{\mathrm{M}}a^{\mathrm{M}-\mathrm{I}}+a^{\mathrm{M}-\mathrm{II}}}{q^{\mathrm{M}}b^{\mathrm{M}-\mathrm{I}}+b^{\mathrm{M}-\mathrm{II}}};$$

$$\frac{a^{\mathrm{N}}}{b^{\mathrm{N}}}=\frac{\left(q^{\mathrm{M}}+\frac{r^{\mathrm{M}}}{r^{\mathrm{M}-1}}\right)a^{\mathrm{M}-\mathrm{I}}+a^{\mathrm{M}-\mathrm{II}}}{\left(q^{\mathrm{M}}+\frac{r^{\mathrm{M}}}{r^{\mathrm{M}-\mathrm{I}}}\right)b^{\mathrm{M}-\mathrm{I}}+b^{\mathrm{M}-\mathrm{II}}}=\frac{r^{\mathrm{M}-1}a^{\mathrm{M}}+r^{\mathrm{M}}a^{\mathrm{M}-1}}{r^{\mathrm{M}-1}b^{\mathrm{M}}+r^{\mathrm{M}}b^{\mathrm{M}-1}}.$$

De là, $\frac{a^{\mathrm{N}}}{b^{\mathrm{N}}}-\frac{a^{\mathrm{M}}}{b^{\mathrm{M}}}=\pm\frac{r^{\mathrm{M}}}{b^{\mathrm{N}}b^{\mathrm{M}}}$.

Savoir, la différence de la valeur complète de la fraction continue et de l'une quelconque des fractions précédentes, est égale à une fraction, qui a pour numérateur le reste correspondant à cette dernière, et qui a pour dénominateur le produit des deux dénominateurs; et cette différence est alternativement en plus et en moins.

Ex. Pour la fraction $\frac{421}{972}$ on a $\frac{r}{130}, \frac{r'}{31}, \frac{r''}{6}, \frac{r'''}{1}$;

$\frac{421}{972}-\frac{68}{157}=+\frac{1}{157.972}$; $\frac{421}{972}-\frac{13}{30}=-\frac{6}{30.972}$;

$\frac{421}{972}-\frac{3}{7}=+\frac{31}{7.972}$; $\frac{421}{972}-\frac{1}{2}=-\frac{130}{2.972}$. Les frac-

tions provenues d'une fraction continue sont alternativement plus petites et plus grandes que la valeur totale de la fraction continue, suivant qu'elles occupent des places paires ou des places impaires ; en sorte que cette valeur est moyenne entre deux fractions successives de la suite des fractions qui en proviennent.

§ 252. Lorsque dans la suite des quotiens successifs $q, q', q'', q''', \ldots$ il en est quelqu'un égal à l'unité ; c'est une marque que dans la division précédente, le véritable quotient approche du nombre supérieur d'une unité au quotient que l'on a pris, plus qu'il n'approche de ce dernier; alors, on peut augmenter celui-ci d'une unité, ce qui rend la suite des fractions obtenues plus promptement convergente vers la valeur complète de la fraction continue.

Ex. La fraction $\frac{122}{337}$ donne lieu aux quotiens successifs, 2, 1, 3, 4, 1, 5. $\frac{337}{122}=2+\frac{93}{122}$; $\frac{122}{93}=1+\frac{29}{93}$. Soit fait $\frac{337}{122}=3-\frac{29}{122}$; $\frac{122}{29}=4+\frac{6}{29}$; $\frac{29}{6}=4+\frac{5}{6}$; $\frac{6}{5}=1+\frac{1}{5}$; soit fait $\frac{29}{6}=5-\frac{1}{6}$;

on a, $$\frac{122}{337}=\cfrac{1}{3-\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5-\cfrac{1}{6}}}}.$$

Les fractions provenues des premiers quotiens sont successivemeut, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{4}{11}$, $\frac{17}{47}$, $\frac{21}{58}$, $\frac{122}{337}$; suivant la seconde manière d'opérer on a seulement les fractions, $\frac{1}{3}$, $\frac{4}{11}$, $\frac{21}{58}$, $\frac{122}{337}$; on omet les fractions $\frac{1}{3}$, $\frac{17}{47}$, qui répondent aux dénominateurs qui précèdent les dénominateurs égaux à l'unité.

La suppression de l'unité dans la suite des dénominateurs de la fraction continue se fait, en augmentant d'une unité chacun des dénominateurs entre lesquels elle est située, et en les séparant par le signe —: en effet, $\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{b}}} = \cfrac{1}{a+1-\cfrac{1}{b+1}}$; et réciproquement, la suppression du signe — qui sépare deux termes successifs d'une fraction continue, se fait, en diminuant d'une unité les dénominateurs séparés par ce signe, et en mettant entr'eux l'unité.

Soient $\frac{a^{N-1}}{b^{N-1}}$, $\frac{a^N}{b^N}$, $\frac{a^{N+1}}{b^{N+1}}$, trois fractions successives, dont les deux dernières répondent aux quotiens $+q^N$, $-q^{N+1}$; j'affirme que $\frac{a^{N+1}}{b^{N+1}} = \frac{q^{N+1}a^N - a^{N-1}}{q^{N+1}b^N - b^{N-1}}$.

En effet, $\frac{a^{N+1}}{b^{N+1}} = \frac{(q^N - \frac{1}{q^{N+1}})a^{N-1} + a^{N-II}}{(q^N - \frac{1}{q^{N+1}})b^{N-1} + b^{N-II}}$

$$= \frac{a^N - \frac{1}{q^{N+1}}a^{N-1}}{b^N - \frac{1}{q^{N+1}}b^{N-1}} = \frac{q^{N+1}a^N - a^{N-1}}{q^{N+1}b^N - b^{N-1}}.$$

De là, $\frac{a^N}{b^N} - \frac{a^{N+1}}{b^{N+1}} = \frac{a^N}{b^N} - \frac{q^{N+1}a^N - a^{N-1}}{q^{N+1}b^N - b^{N-1}}$

$$= \frac{-a^N b^{N-1} + a^{N-1}b^N}{b^N b^{N+1}} = \frac{b^{N-1}}{b^{N+1}}\left(\frac{a^{N-1}}{b^{N-1}} - \frac{a^N}{b^N}\right);$$

partant, les différences des trois fractions successives $\frac{a^{N-1}}{b^{N-1}}$, $\frac{a^N}{b^N}$, $\frac{a^{N+1}}{b^{N+1}}$, ont le même signe.

§ 253. Les fractions $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$, $\frac{a''}{b''} \ldots \frac{a^N}{b^N}$, provenues d'une fraction continue, ne sont pas les seules qui jouissent de la propriété que la différence de deux fractions voisines est l'unité sur le produit de leurs dénominateurs.

Soient $\frac{a^{N-1}}{b^{N-1}}$, $\frac{a^N}{b^N}$, $\frac{a^{N+1}}{b^{N+1}}$, trois fractions successives, provenues d'une fraction continue; et soit q^{N+1} le dénominateur correspondant

à la dernière : des termes de celle-ci $\frac{a^{N+1}}{b^{N+1}}$ soient retranchés les produits des termes de la précédente $\frac{a^N}{b^N}$ par les nombres $1, 2, 3 \ldots q^{N+1}-1$; les fractions qui en proviennent sont intercalées entre les fractions $\frac{a^N}{b^N}, \frac{a^{N+1}}{b^{N+1}}$; leur nombre est inférieur d'une unité au dénominateur q^{N+1} : les termes des fractions intercalées sont aussi les sommes des termes de la fraction $\frac{a^N}{b^N}$, et des produits des termes de la fraction $\frac{a^{N-1}}{b^{N-1}}$ par les nombres $1, 2, 3, \ldots q^{N+1}-1$. La différence de deux de ces fractions, est l'unité sur le produit de leurs dénominateurs. En effet, soient $\frac{a^{N+1}-ma^N}{b^{N+1}-mb^N}$ et $\frac{a^{N+1}-m'a^N}{b^{N+1}-m'b^N}$ deux de ces fractions intercalées, le numérateur de leur différence est $(m-m')(a^{N+1}b^N-a^Nb^{N+1}) = \pm(m-m')$ (§ 250); partant, si m et m' diffèrent d'une unité, cette différence est constamment ± 1.

Les fractions provenues immédiatement de la fraction continue sont appelées *principales*;

les fractions intercalées sont appelées *secondaires*. L'assemblage des fractions principales et des fractions secondaires, forme le système complet des fractions convergentes vers la valeur totale de la fraction continue, en termes plus petits que ceux de la fraction égale à cette dernière.

Ex. Dénominateurs successifs de la fraction continue; 2, 3, 4, 5, 6. Fractions vulgaires qui en proviennent, $\frac{1}{2}, \frac{3}{7}, \frac{13}{30}, \frac{68}{157}, \frac{421}{972}$. Suite complète des fractions principales et des fractions secondaires, $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}$; $\frac{4}{9}, \frac{7}{16}, \frac{10}{23}, \frac{13}{30}$; $\frac{16}{37}, \frac{29}{67}, \frac{42}{97}, \frac{55}{127}, \frac{68}{157}$; $\frac{81}{187}, \frac{149}{344}, \frac{217}{501}, \frac{295}{658}, \frac{353}{815}, \frac{421}{972}$. Dans cette suite, la différence de deux fractions voisines, est l'unité sur le produit de leurs dénominateurs; de manière que le signe de cette différence est contraire au signe de la différence des fractions principales entre lesquelles elles sont intercalées, en prenant ces différences dans un même sens.

§ 254. Aux exercices proposés dans le ch. Vme. § 56, qu'il convient de traiter aussi par les fractions continues, je vais en joindre deux autres tirés du chap. XVIII.

Nous avons trouvé (§ 243) que le module du système des logarithmes tabulaires est

o, 43429448. On demande les fractions vulgaires qui approchent de cette fraction décimale.

Comme les fractions vulgaires provenues d'une fraction continue ont leurs termes d'autant plus grands qu'elles sont plus éloignées de la première, et que leur usage est d'autant moins commode que leurs termes sont plus grands ; il me suffira pour les applications de calculer les huit premières de ces fractions. Les huit premiers quotiens auxquels donne lieu la fraction $\frac{43\,429\,448}{100\,000\,000}$ quand on recherche le plus grand diviseur commun de ses termes, sont, 2, 3, 3, 3, 1, 1, 3, 6. Les fractions vulgaires qui en proviennent sont les suivantes.

$\frac{1}{2}$=0,500 0000	$\frac{3}{7}$=0,428 571 43—
$\frac{10}{23}$=0,434 7826	$\frac{33}{76}$=0,434 210 53—
$\frac{43}{99}$=0,434 3434	$\frac{76}{175}$=0,434 285 71+
$\frac{271}{624}$=0,434 294 $\frac{8}{9}$	$\frac{1702}{3909}$=0,434 29446

Les logarithmes tabulaires sont plus grands que les $\frac{3}{7}$ ou $\frac{69}{161}$ des logarithmes naturels ; mais ils sont plus petits que les $\frac{10}{23}$ ou $\frac{70}{161}$ de ces logarithmes.

La première des fractions secondaires intercalées entre $\frac{10}{23}$, et $\frac{33}{76}$, est $\frac{13}{30}$=0,4333333...

dont la différence d'avec la fraction proposée est 0,000 96. Partant, les logarithmes tabulaires s'éloignent peu d'être la somme du tiers et d'$\frac{1}{10}$ des logarithmes naturels.

Dans le § 244 nous avons trouvé que la base des logarithmes naturels est 2,718 281 83—. Les huit premiers quotiens de la fraction continue, provenue de la fraction $\frac{71\,218\,183}{100\,000\,000}$, sont 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, on a :

$1=1$ $\frac{2}{3}=0,666\,666\,67\ldots$

$\frac{3}{4}=0,75$ $\frac{5}{7}=0,714\,285\,71\ldots$

$\frac{23}{32}=0,718\,75$ $\frac{28}{39}=0,717\,948\,72\ldots$

$\frac{51}{71}=0,718\,309\,86\ldots$ $\frac{334}{465}=0,718\,279\,83\ldots$

La fraction $\frac{18}{25}$ intercalée entre $\frac{23}{32}$ et $\frac{5}{7}$, est 0,72 dont la différence à la fraction proposée est 0,001 718 17.

Autr. ex. La valeur de la demi-circonférence du cercle dont le rayon est l'unité, approchée jusqu'aux 10 000 000mes, étant 3,141 592 6 : on demande les expressions approchées de cette valeur en fractions vulgaires.

§ 255. Parmi les fractions continues, je crois devoir faire remarquer celles qui sont composées de termes qui reviennent les mêmes et dans un même ordre : on les appelle à

cause de cela *périodiques*. Les fractions continues périodiques ont une limite qu'on peut toujours assigner : je vais d'abord développer cette proposition sur quelques cas simples.

1[er]. *Cas*. Que la période soit composée d'un seul terme.

Soit $x=\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\ldots}}$; $\frac{1}{x}=a+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\ldots}}=a+x$;

$xx+ax=1$; $x=\frac{\sqrt{(aa+4)}-a}{2}$; la limite de la fraction continue proposée, ou sa valeur si elle pouvoit être terminée, est donc, $\frac{\sqrt{(aa+4)}-a}{2}$.

Ex. Soit $a=1$; la limite est $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$; de là, les valeurs approchées de $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ sont,

$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{8}{13}, \frac{13}{21}, \frac{21}{34}, \ldots$

Soit $a=2$, la limite est $\sqrt{2}-1$; les valeurs successivement approchées de $\sqrt{2}-1$ sont,

$\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{5}{12}, \frac{12}{29}, \frac{29}{70}, \ldots$

2[d]. *Cas*. Que la période soit composée de deux termes.

1°. Soit $x = \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{a + \ldots}}}$; $\frac{1}{x} = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{a + \ldots}}$;

$\frac{x}{1-ax} = b + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \ldots}} = b + x.$

$$axx + abx = b\,;\; x = \frac{\sqrt{(ab(ab+4))} - ab}{2a}.$$

Ex. Soit $a=1, b=2$; $x = \frac{\sqrt{(2.6)}-2}{2} = \sqrt{3}-1.$

Valeurs successivement approchées de $\sqrt{3}-1$, $\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{8}{19}, \frac{11}{26}, \frac{30}{71}, \ldots$

2°. Soit $x = \cfrac{1}{a - \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{a - \ldots}}}$; $\frac{1}{x} = a - \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{a - \ldots}}$

$= a - \frac{1}{b+x}$; $a = \frac{1}{x} + \frac{1}{b+x} = \frac{b+2x}{x(b+x)}$.

$$x = \frac{\sqrt{(aabb+4)} - (ab-2)}{2a}.$$

Ex. Soit $a=1, b=1$; $x = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$; on obtient les fractions successives, $\frac{1}{1}, \frac{1}{0}, \frac{2}{1}, \frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{1}, \frac{5}{3}, \frac{3}{2}, \frac{8}{5}, \frac{5}{3}, \frac{13}{8}, \frac{8}{5}, \frac{21}{13}, \ldots$ qui sont ramenées à $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13} \ldots$ Soit $a=1$, $b=2$; $x = \frac{\sqrt{8}}{2} = \sqrt{2}.$

On a la suite des fractions $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{7}{5}, \frac{10}{7}, \frac{17}{12}, \frac{24}{17}, \ldots$ convergentes vers $\sqrt{2}$.

3me. *Cas.* Soit la période composée de trois termes.

Soit $x = \cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{a+\ldots}}}}$; $\frac{1}{x} = a + \cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{a+\ldots}}}$;

$$\frac{x}{1-ax} = b + \cfrac{1}{c+\cfrac{1}{a+\ldots}} = b + \frac{1}{c+x};\ b = \frac{x}{1-ax} - \frac{1}{c+x};$$

$$xx + ax + cx - 1 = b(c - acx + x - axx).$$

$xx(ab+1) + x(a-b+c+abc) = bc+1$; de là,

$$x = \frac{\sqrt{((a+b+c+abc)^2+4)} - (a-b+c+abc)}{2(ab+1)}.$$

Ces exemples suffisent pour montrer que la valeur d'une fraction continue périodique dépend de la solution d'une équation du second degré, quel que soit le nombre des termes dont chaque période est composée. En effet, tant qu'on n'a pas épuisé la première période, on obtient au premier membre des fractions dont les termes contiennent l'inconnue élevée seulement à la première puissance. La dernière de ces fractions étant égalée à une fraction de la forme $\frac{1}{m+x}$ (m étant le der-

nier terme de la période), donne une équation du second degré (a).

§ 256. La proposition inverse, savoir que les racines d'une équation du second degré, lorsqu'elles sont irrationnelles, peuvent être obtenues par une fraction continue périodique, est plus difficile à démontrer généralement : je vais donner quelques exemples particuliers, relatifs aux racines carrées.

---

(1) Quoique l'équation à laquelle conduit la recherche de la limite d'une fraction continue périodique ait deux racines, dont l'une est positive et l'autre est négative; on ne peut admettre pour l'expression de la limite que la racine positive, tous les termes de la fraction proposée étant positifs.

On doit aussi appliquer la recherche de la limite aux cas seulement où les termes de la fraction continue sont en effet des quantités. Par exemple, ayant trouvé que la fraction continue périodique dont les termes sont a et b a pour limite $\frac{\sqrt{ab(ab+4)}-ab}{2a}$ $=\frac{2b}{\sqrt{(ab(ab+4))}+ab}$; soit fait $b=ma$, cette limite est $\frac{2ma}{\sqrt{(maa(maa+4))}+maa}=\frac{2\sqrt{m}}{\sqrt{(4+maa)}+a\sqrt{m}}$ Il y auroit abus de symboles que d'appliquer cette formule au cas où $a=0$; ce qui donneroit pour limite $\sqrt{m}$.

1°. Soit un nombre de la forme $ee+1$, dont on cherche la racine carrée.

Soit $\sqrt{(ee+1)}=e+\frac{1}{x}$.

$$\frac{1}{x}=\sqrt{(ee+1)}-e;\ x=\frac{1}{\sqrt{(ee+1)}-e}=\sqrt{(ee+1)}+e=2e+\frac{1}{x'}.$$

$$\frac{1}{x'}=\sqrt{(ee+1)}-e=\frac{1}{x}.\quad \sqrt{(ee+1)}=e+\cfrac{1}{2e+\cfrac{1}{2e+\ldots}}$$

$$Ex.\ \sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ldots}}=1+(\tfrac{1}{2},\tfrac{2}{5},\tfrac{5}{12},\tfrac{12}{29},\tfrac{29}{70},\ldots)$$

Dans la suite, 1, 2, 5, 12, 29, 70, ... chaque terme est la somme du double de celui qui le précède et du penultième simple. Ces nombres sont donc les coefficiens de la suite récurrente, provenue du développement en suite de la fraction,

$$\frac{1}{1-2x-xx}=\frac{1}{(1-2x+xx)-2xx}=\frac{1}{1+x(\sqrt{2}-1)}\cdot\frac{1}{1-x(\sqrt{2}+1)},$$

$$=\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{1+x(\sqrt{2}-1)}+\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{1-x(\sqrt{2}+1)};$$

et partant, le n^{me} terme de cette suite est

$$\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}(\sqrt{2}+1)^{n-1}\pm\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}(\sqrt{2}-1)^{n-1}=\frac{(\sqrt{2}+1)^n\pm(\sqrt{2}-1)^n}{2\sqrt{2}}$$

(voy. §§ 238)

Valeurs approchées de $\sqrt{2}$; $\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}\ldots$

On a : $1^2=2\times 1-1$, $3^2=2.\ 2^2+1$;
$7^2=2.\ 5^2-1$, $17^2=2.12^2+1$;
$41^2=2.\ 29^2-1$, $99^2=2.70^2+1$.

Savoir, les carrés des numérateurs diffèrent des doubles des carrés des dénominateurs d'une unité, alternativement en plus et en moins (v. § 78).

$$\sqrt{5}=1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\ldots}}=2+\left(\frac{1}{4}, \frac{4}{17}, \frac{17}{72}, \frac{72}{305}, \frac{305}{1292}, \ldots\right)$$

Dans la suite 1, 4, 17, 72, 305..... chaque terme est la somme du quadruple de celui qui le précède et du pénultième simple ; cette suite provient donc du développement de la fraction $\frac{1}{1-4x-x^2}=\frac{1}{1-4x+4x^2-5x^2}$

$$=\frac{1}{(1-2x)^2-5x^2}=\frac{1}{1+x(\sqrt{5}-2)}\times\frac{1}{1-x(\sqrt{5}+2)}$$

$$=\frac{\sqrt{5}+2}{2\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{1-x(\sqrt{5}+2)}+\frac{\sqrt{5}-2}{2\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{1+x(\sqrt{5}-2)}.$$

Le n^{me} terme de cette suite est donc :

$$\frac{\sqrt{5}+2}{2\sqrt{5}}(\sqrt{5}+2)^{n-1}\pm\frac{\sqrt{5}-2}{2\sqrt{5}}(\sqrt{5}-2)^{n-1}=\frac{(\sqrt{5}+2)^n+(\sqrt{5}-2)^n}{2\sqrt{5}}$$

Les valeurs successivement approchées de $\sqrt{5}$ sont :

$$\frac{2}{1},\ \frac{9}{4},\ \frac{38}{17},\ \frac{161}{72},\ \frac{682}{305},\ \frac{2889}{1292},\ldots$$

$$2^2=5.\ 1^2-1,\qquad 9^2=5.\ 4^2+1$$
$$38^2=5.\ 17^2-1,\qquad 161^2=5.\ 72^2+1$$
$$682^2=5.305^2-1,\qquad 2889^2=5.1292^2+1.$$

En général, dans la suite récurrente, provenue du développement de la fraction continue $\cfrac{1}{2e+\cfrac{1}{2e+\ldots}}$, chaque terme est la somme du produit du terme précédent par $2e$, et du pénultième simple. Partant, ces termes proviennent du développement en suite de la fraction $\frac{1}{1-2ex-xx}=\frac{1}{1-2ex+eexx-xx(ee+1)}$

$$=\frac{1}{(1-x)^2-xx(ee+1)}=\frac{1}{1-x(\sqrt{(ee+1)}+1)}.\frac{1}{1+x(\sqrt{(ee+1)}-1)}$$

$$=\frac{\sqrt{(ee+1)}+1}{2\sqrt{(ee+1)}}.\frac{1}{1-x(\sqrt{(ee+1)}+1)}$$

$$+\frac{\sqrt{(ee+1)}-1}{2\sqrt{(ee+1)}}.\frac{1}{1+x(\sqrt{(ee+1)}-1)}.$$

Terme général, $\frac{(\sqrt{(ee+1)}+1)^n\pm(\sqrt{(ee+1)}-1)^n}{2\sqrt{(ee+1)}}$.

2°. Soit un nombre de la forme $ee-1$ dont on cherche la racine carrée.

Soit $\sqrt{(ee-1)}=e-\frac{1}{x}$; $\frac{1}{x}=e-\sqrt{(ee-1)}$;

$$x=\frac{1}{e-\sqrt{(ee-1)}}=e+\sqrt{(ee-1)}=2e-\frac{1}{x'}.$$

$$\frac{1}{x'}=e-\sqrt{(ee-1)}=\frac{1}{x}.\quad \sqrt{(ee-1)}=e-\cfrac{1}{2e-\cfrac{1}{2e-\cfrac{1}{2e-\ldots}}}$$

$$Ex.\ \sqrt{3}=2-\cfrac{1}{4-\cfrac{1}{4-\cfrac{1}{4-\ldots}}}=2-(\tfrac{1}{4},\tfrac{4}{15},\tfrac{15}{56},\tfrac{56}{209},\tfrac{209}{780},\ldots)$$

Dans la suite, 1, 4, 15, 56, 209, 780,... chaque terme est l'excès du quadruple de celui qui le précède sur le pénultième simple; cette suite provient donc du développement de la fraction $\frac{1}{1-4x+x^2}=\frac{1}{(1-2x)^2-3x^2}$

$$=\frac{1}{1-x(2-\sqrt{3})}.\frac{1}{1-x(2+\sqrt{3})}$$

$$=\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}.\frac{1}{1-x(2+\sqrt{3})}-\frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}.\frac{1}{1-x(2-\sqrt{3})}.$$

Le n^{me} terme de cette suite est $\frac{(2+\sqrt{3})^n-(2-\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}}$.

Les valeurs successivement approchées de $\sqrt{3}$, sont $\frac{2}{1}, \frac{7}{4}, \frac{26}{15}, \frac{97}{56}, \frac{362}{209}, \frac{1351}{780}, \ldots$

$2^2=3.1^2+1$; $7^2=3.4^2+1$; $26^2=3.15^2+1$;

$97^2=$

$97^2 = 3.56^2 + 1$..... Les carrés de chacune de ces fractions surpassent 3, de l'unité sur le carré du dénominateur.

$$\sqrt{8} = 3 - \cfrac{1}{6 - \cfrac{1}{6 - \cfrac{1}{6 - \dots}}} = 3 - \left(\frac{1}{6}, \frac{6}{35}, \frac{35}{204}, \frac{204}{1189}, \dots\right)$$

Dans la suite, 1, 6, 35, 204, 1189, ... chaque terme est l'excès du sextuple du terme précédent sur le pénultième simple; cette suite provient du développement de la fraction,

$$\frac{1}{1-6x+x^2} = \frac{1}{(1-3x)^2-8x^2} = \frac{1}{1-x(3+2\sqrt{2})} \cdot \frac{1}{1-x(3-2\sqrt{2})}$$

$$\frac{3+2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{1-x(3+2\sqrt{2})} - \frac{3-2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{1-x(3-2\sqrt{2})};$$ le n^{me} terme de cette suite est $\frac{(3+2\sqrt{2})^n-(3-2\sqrt{2})^n}{4\sqrt{2}}$.

Les valeurs successivement approchées de $\sqrt{8}$ sont, 3, $\frac{17}{6}$, $\frac{99}{35}$, $\frac{577}{204}$, $\frac{3363}{1189}$, ...

En général, dans la suite récurrente provenue du développement de la fraction continue $\cfrac{1}{2e - \cfrac{1}{2e - \dots}}$ chaque terme est l'excès du produit du terme précédent par $2e$, sur le pénultième; elle provient du développement de

la fraction $\frac{1}{1-2ex+xx} = \frac{1}{1-2ex+eexx-xx(ee-1)}$

$$= \frac{e+\sqrt{(ee-1)}}{2\sqrt{(ee-1)}} \cdot \frac{1}{1-x(e+\sqrt{(ee-1)})}$$

$$- \frac{e-\sqrt{(ee-1)}}{2\sqrt{(ee-1)}} \cdot \frac{1}{1-x(e-\sqrt{(ee-1)})}.$$

Terme général, $\frac{(e+\sqrt{(ee-1)})^n-(e-\sqrt{(ee-1)})^n}{2\sqrt{(ee-1)}}$.

3°. Forme du nombre proposé, $ee+2$.

Soit $\sqrt{(ee+2)} = e + \frac{1}{x}$;

$$\frac{1}{x} = \sqrt{(ee+2)}-e;\ x = \frac{1}{\sqrt{(ee+2)}-e} = \frac{\sqrt{(ee+2)}+e}{2} = +1\frac{1}{x'};$$

$$\frac{1}{x'} = \frac{\sqrt{(ee+2)}-e}{2};\ x' = \frac{2}{\sqrt{(ee+2)}-e} = \sqrt{(ee+2)}+e = 2e + \frac{1}{x''}.$$

$$\frac{1}{x''} = \sqrt{(ee+2)}-e = \frac{1}{x}.\quad \sqrt{(ee+2)} = e + \cfrac{1}{e + \cfrac{1}{2e + \cfrac{1}{e + \ldots}}}$$

Chaque période de la fraction continue est composée de deux termes, lesquels sont e et $2e$.

Ex. $\sqrt{6} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \ldots}}}} = 2 + \left(\frac{1}{2}, \frac{4}{9}, \frac{9}{20}, \frac{40}{89}, \frac{89}{198}, \frac{596}{881} \ldots\right).$

Dans la suite des fractions alternatives, $\frac{1}{2}, \frac{9}{20}, \frac{89}{198}, \ldots$ les termes de chacune d'elles sont les excès de 10 fois les termes de la précédente sur ceux de la pénultième; et il en est de même des autres fractions alternatives $\frac{4}{9}, \frac{40}{89}, \frac{396}{881}, \ldots$ partant, tous ces termes tirent leur origine du développement de la

fraction $\frac{1}{1-10x+x^2}=\frac{1}{1-10x+25x^2-24x^2}$

$$=\frac{1}{(1-5x)^2-24x^2}=\frac{1}{(1-x(5+2\sqrt{6}))(1-x(5-2\sqrt{6}))}=$$

$$\frac{5+2\sqrt{6}}{4\sqrt{6}}\cdot\frac{1}{1-x(5+2\sqrt{6})}-\frac{5-2\sqrt{6}}{4\sqrt{6}}\cdot\frac{1}{1-x(5-2\sqrt{6})}.$$

Terme général, $\frac{(5+2\sqrt{6})^n-(5-2\sqrt{6})^n}{4\sqrt{6}}$.

Les nombres, 1, 9, 89, ... proviennent de la fraction $\frac{1-x}{1-10x+x^2}$.

Les dénominateurs, 2, 20, 198, ... ou $2(1, 10, 99 \ldots)$ proviennent de la fraction $2\frac{1}{1-10x+x^2}$, et les numérateurs 4, 40, 396, en sont respectivement les doubles, ou proviennent de la fraction $4.\frac{1}{1-10x+x^2}$.

Valeurs approchées de $\sqrt{6}$, $\frac{2}{1}, \frac{5}{2}, \frac{22}{9}, \frac{49}{20}, \frac{218}{89}\ldots$

$6.1^2 = 2^2+2.\quad 6.\ 2^2 = 5^2-1$

$6.9^2 = 22^2+2;\quad 6.29^2 = 49^2-1.$

$$\sqrt{11} = 3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{6+\ldots}}}} = 3+\left(\frac{1}{3}, \frac{6}{19}, \frac{19}{60}, \frac{120}{379}, \frac{379}{1197}, \frac{2394}{7561}\ldots\right).$$

4°. Forme du nombre proposé; $ee-2$.

Soit $\sqrt{(ee-2)} = e - \frac{1}{x}$.

$$\frac{1}{x} = e-\sqrt{(ee-2)};\ x = \frac{1}{e-\sqrt{(ee-2)}} = \frac{e+\sqrt{(ee-2)}}{2} = e - \frac{1}{x'};$$

$$\frac{1}{x'} = \frac{e-\sqrt{(ee-2)}}{2};\ x' = \frac{2}{e-\sqrt{(ee-2)}} = e+\sqrt{(ee-2)} = 2e - \frac{1}{x''};$$

$$\frac{1}{x''} = e-\sqrt{(ee-2)} = \frac{1}{x}.$$

$$\sqrt{(ee-2)} = e-\cfrac{1}{e-\cfrac{1}{2e-\cfrac{1}{e-\cfrac{1}{2e-\ldots}}}}$$

Ex. $\sqrt{2} = 2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{4-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{4-\ldots}}}}$ $\sqrt{7} = 3-\cfrac{1}{3-\cfrac{1}{6-\cfrac{1}{3-\cfrac{1}{6-\ldots}}}}$

5°. Forme du nombre proposé, $ee+4$.

Soit $\sqrt{(ee+4)} = e + \frac{2}{x}$;

$$\frac{2}{x}=\sqrt{(ee+4)}-e;\ \tfrac{1}{2}x=\frac{1}{\sqrt{(ee+4)}-e};\ x=\frac{\sqrt{(ee+4)}+e}{2}=e+\frac{1}{x'};$$

$$\frac{1}{x'}=\frac{\sqrt{(ee+4)}-e}{2};\ x'=\frac{2}{\sqrt{(ee+4)}-e}=\frac{\sqrt{(ee+4)}+e}{2}=e+\frac{1}{x''}$$

$$\frac{1}{x''}=\frac{\sqrt{(ee+4)}-e}{2}=\frac{1}{x'}.$$

$$\sqrt{(ee+4)}=e+\cfrac{2}{e+\cfrac{1}{e+\cfrac{1}{e+\dots}}}$$

Ex. $\sqrt{13}=3+\cfrac{2}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\dots}}}$ $\sqrt{20}=4+\cfrac{2}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\dots}}}=4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{2+\dots}}}$

6°. Forme du nombre proposé ; $ee-4$.

Soit $\sqrt{(ee-4)}=e-\frac{2}{x}$.

$$\frac{2}{x}=e-\sqrt{(ee-4)},\ \tfrac{1}{2}x=\frac{1}{e-\sqrt{(ee-4)}};\ x=\frac{e+\sqrt{(ee-4)}}{2}=e-\frac{1}{x'}$$

$$\frac{1}{x'}=\frac{e-\sqrt{(ee-4)}}{2};\ x'=\frac{2}{e-\sqrt{(ee-4)}}=\frac{e+\sqrt{(ee-4)}}{2}=e-\frac{1}{x''}.$$

$$\frac{1}{x''}=\frac{e-\sqrt{(ee-4)}}{2}=\frac{1}{x'}.\ \sqrt{(ee-4)}=e-\cfrac{2}{e-\cfrac{1}{e-\cfrac{1}{e-\dots}}}$$

Ex. $\sqrt{21}=5-\cfrac{2}{5-\cfrac{1}{5-\cfrac{1}{5-\dots}}}$; $\sqrt{32}=6-\cfrac{2}{6-\cfrac{1}{6-\cfrac{1}{6-\dots}}}=6-\cfrac{1}{3-\cfrac{1}{12-\cfrac{1}{3-\cfrac{1}{12-\dots}}}}$

7°. Forme du nombre proposé, $ee+e$.

Soit $\sqrt{(ee+e)}=e+\frac{1}{x}$.

$$\frac{1}{x}=\sqrt{(ee+e)}-e;\ x=\frac{1}{\sqrt{(ee+e)}-e}=\frac{\sqrt{(ee+e)}+e}{e}=2+\frac{1}{x'};$$

$$\frac{1}{x'}=\frac{\sqrt{(ee+e)}-e}{e};\ x'=\frac{e}{\sqrt{(ee+e)}-e}=\sqrt{(ee+e)}+e=2e+\frac{1}{x''}$$

$$\frac{1}{x''}=\sqrt{(ee+e)}-e=\frac{1}{x}.\quad \sqrt{(ee+e)}=e+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2e+\cfrac{1}{2+\dots}}}$$

8°. Forme du nombre proposé, $ee-e$.

Soit $\sqrt{(ee-e)}=e-\frac{1}{x}$.

$$\frac{1}{x}=e-\sqrt{(ee-e)};\ x=\frac{1}{e-\sqrt{(ee-e)}}=\frac{e+\sqrt{(ee-e)}}{e}=2-\frac{1}{x'},$$

$$\frac{1}{x'}=\frac{e-\sqrt{(ee-e)}}{e};\ x'=\frac{e}{e-\sqrt{(ee-e)}}=e+\sqrt{(ee-e)}=2e-\frac{1}{x''}$$

$$\frac{1}{x''}=e-\sqrt{(ee-e)}=\frac{1}{x}.\ \sqrt{(ee-e)}=e-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2e-\cfrac{1}{2-\dots}}}$$

Après avoir introduit par les exemples de quelques formes simples au procédé par lequel on réduit en fractions continues les racines carrées : je vais développer quelques exemples qui entraînent plus de longueurs.

Soit $\sqrt{13}=3+\frac{1}{x}$;

$$\frac{1}{x}=\sqrt{13}-3;\ x=\frac{1}{\sqrt{13}-3}=\frac{\sqrt{13}+3}{4}=1+\frac{1}{x'},$$

$$\frac{1}{x'}=\frac{\sqrt{13}-1}{4};\ x'=\frac{4}{\sqrt{13}-1}=\frac{\sqrt{13}+1}{3}=1+\frac{1}{x''}$$

$$\frac{1}{x''}=\frac{\sqrt{13}-2}{3};\ x''=\frac{3}{\sqrt{13}-2}=\frac{\sqrt{13}+2}{3}=1+\frac{1}{x'''}$$

$$\frac{1}{x'''}=\frac{\sqrt{13}-1}{3};\ x'''=\frac{3}{\sqrt{13}-1}=\frac{\sqrt{13}+1}{4}=1+\frac{1}{x^{\text{IV}}}$$

$$\frac{1}{x^{\text{IV}}}=\frac{\sqrt{13}-3}{4};\ x^{\text{IV}}=\frac{4}{\sqrt{13}-3}=\sqrt{13}+3=6+\frac{1}{x^{\text{V}}},$$

$$\frac{1}{x^{\text{V}}}=\sqrt{13}-3=\frac{1}{x}.$$

Partant, chaque période est composée de 5 termes, qui sont : 1, 1, 1, 1, 6.

$\sqrt{13}=3+(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{20}{33} ..)=\frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{7}{2}, \frac{11}{3}, \frac{18}{5}, \frac{119}{33}...$

$13.1^2=3^2+4$; $13.1^2=4^2-3$, $13.2^2=7^2+3$;

$13.3^2=11^2-4$; $13.5^2=18^2+1$; $13.33^2=119^2-4$.

Autrement. $\sqrt{13}=4-\frac{1}{x}$;

$$\frac{1}{x}=4-\sqrt{13},\ x=\frac{1}{4-\sqrt{13}}=\frac{4+\sqrt{13}}{3}=3-\frac{1}{x'},$$

$$\frac{1}{x'}=\frac{5-\sqrt{13}}{3},\ x'=\frac{3}{5-\sqrt{13}}=\frac{5+\sqrt{13}}{4}=2+\frac{1}{x''}$$

$$\frac{1}{x''}=\frac{\sqrt{13}-3}{4},\ x''=\frac{4}{\sqrt{13}-3}=\sqrt{13}+3=7-\frac{1}{x'''},$$

$$\frac{1}{x'''}=4-\sqrt{13}=\frac{1}{x}.$$

Soit $\sqrt{19}=4+\frac{1}{x}$;

$$\frac{1}{x}=\sqrt{19}-4,\quad x=\frac{1}{\sqrt{19}-4}=\frac{\sqrt{19}+4}{3}=3-\frac{1}{x'}$$

$$\frac{1}{x'}=\frac{5-\sqrt{19}}{3};\quad x'=\frac{3}{5-\sqrt{19}}=\frac{5+\sqrt{19}}{2}=5-\frac{1}{x''}$$

$$\frac{1}{x''}=\frac{5-\sqrt{19}}{2};\quad x''=\frac{2}{5-\sqrt{19}}=\frac{5+\sqrt{19}}{3}=3+\frac{1}{x'''}$$

$$\frac{1}{x'''}=\frac{\sqrt{19}-4}{3};\quad x'''=\frac{3}{\sqrt{19}-4}=\sqrt{19}+4=8+\frac{1}{x^{\text{IV}}}$$

$$\frac{1}{x^{\text{IV}}}=\sqrt{19}-4=\frac{1}{x}.$$

$$\sqrt{61}=8-\frac{1}{x};$$

$$\frac{1}{x}=8-\sqrt{61},\quad x=\frac{1}{8-\sqrt{61}}=\frac{8+\sqrt{61}}{3}=5+\frac{1}{x'},$$

$$\frac{1}{x'}=\frac{\sqrt{61}-7}{3},\quad x'=\frac{3}{\sqrt{61}-7}=\frac{\sqrt{61}+7}{4}=4-\frac{1}{x''}$$

$$\frac{1}{x''}=\frac{9-\sqrt{61}}{4},\quad x''=\frac{4}{9-\sqrt{61}}=\frac{9+\sqrt{61}}{5}=3+\frac{1}{x'''}$$

$$\frac{1}{x'''}=\frac{\sqrt{61}-6}{5},\quad x'''=\frac{5}{\sqrt{61}-6}=\frac{\sqrt{61}+6}{5}=3-\frac{1}{x^{\text{IV}}}$$

$$\frac{1}{x^{\text{IV}}}=\frac{9-\sqrt{61}}{5},\quad x^{\text{IV}}=\frac{5}{9-\sqrt{61}}=\frac{9+\sqrt{61}}{4}=4+\frac{1}{x^{\text{V}}}$$

$$\frac{1}{x^{\text{V}}}=\frac{\sqrt{61}-7}{4},\quad x^{\text{V}}=\frac{4}{\sqrt{61}-7}=\frac{\sqrt{61}+7}{3}=5-\frac{1}{x^{\text{VI}}}$$

$$\frac{1}{x^{\text{VI}}}=\frac{8-\sqrt{61}}{3},\quad x^{\text{VI}}=\frac{3}{8-\sqrt{61}}=8+\sqrt{61}=16-\frac{1}{x^{\text{VII}}}$$

$$\frac{1}{x^{\text{VII}}}=8-\sqrt{61}=\frac{1}{x}.$$

La destination de ces Elémens m'engage à me contenter de cette esquisse du procédé général par lequel on réduit les racines carrées en fractions continues périodiques. Cette partie intéressante de l'analyse indéterminée est due à la sagacité de LA GRANGE; qui a fait voir l'étendue de ses applications à l'approximation des racines irrationnelles des équations du second degré, et à la solution en nombres entiers des fonctions du second degré à deux inconnues. Voyez ses Mémoires parmi ceux de Berlin 1768, ses Additions à l'Algèbre d'Euler, et son Ouvrage intitulé, *De la Résolution des équations numériques*; voyez aussi *la Théorie des Nombres* de LE GENDRE.

CHAPITRE XX.

Sur la Composition des Equations, et Recherche de leurs racines entières et rationnelles.

§ 257. LORSQUE dans une équation à une inconnue les exposans de cette dernière sont tous des nombres entiers et positifs; le degré de l'équation est déterminé par le plus haut exposant de l'inconnue. Ainsi, l'équation est dite du 1er. du 2^d^. du 3me.... du n^{me} degré; suivant que le plus haut exposant de l'inconnue est 1, 2, 3, ... n. La *racine* d'une équation est la valeur de l'inconnue qui y satisfait.

De même que les équations du second degré peuvent être ramenées à la question générale : trouver deux nombres dont on connoît la somme et le produit; on peut aussi présenter les équations du troisième degré comme tirant leur origine de la question suivante. Trouver trois nombres en connoissant

leur somme p', la somme de leurs produits deux à deux p'', et leur produit continuel p''' (a).

Soient les trois nombres cherchés, x, y, z.

On a les trois équations $\begin{cases} x+y+z = p' \\ xy+xz+yz = p'' \\ xyz = p'''. \end{cases}$

Réd. Soient multipliés les membres de la première équation par x^2 ; les membres de la seconde par x ; et après ces changemens soient pris les membres des trois équations alternativement en plus et en moins, on obtient $x^3 = p'x^2 - p''x + p'''$, ou $x^3 - p'x^2 + p''x - p''' = 0$. On obtiendroit des équations semblables dans chacune des deux autres inconnues y et z : partant, une de ces trois équations telle que $x^3 - p'x^2 + p''x - p''' = 0$, représente chacune des deux autres, et elle doit contenir les valeurs soit de x, soit de y, soit de z. L'inconnue x a donc trois valeurs, telles que, l'une d'elles étant prise pour celle de x comme déterminée, une des deux valeurs restantes est celle de y, et la troisième est celle de z. Ainsi, si on désigne par a, b, c, les valeurs de x qui satis-

---

(1) Dans tout ce chapitre je prends le mot *somme*, dans le sens algébrique et général, qui comprend aussi les *différences* s'il y a lieu.

font à l'équation $x^3-p'x^2+p''x-p'''=0$, ou les trois racines de cette équation, on a: $a+b+c=p'$, $ab+ac+bc=p''$, $abc=p'''$. Partant, dans une équation du troisième degré dont les termes sont ordonnés suivant les puissances de l'inconnue, dans laquelle le coefficient du premier terme est l'unité, et dont le second membre est zéro; le coefficient du second terme est égal à la somme des valeurs de l'inconnue avec le signe contraire; le coefficient du troisième terme est la somme de leurs produits deux à deux, et le quatrième terme est leur produit continuel avec le signe contraire.

Soient a, b, c, les trois racines d'une équation du troisième degré, de manière qu'on ait séparément les trois équations $x=a$, $x=b$, $x=c$; ou $x-a=0$, $x-b=0$, $x-c=0$. Soit pris le produit continuel des trois binomes $x-a$, $x-b$, $x-c$; on obtient:

$$x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc=0.$$

Ce résultat s'accorde avec ce qui vient d'être démontré, et il nous apprend qu'une équation du troisième degré dont le second membre est zéro, étant proposée, on peut toujours regarder le premier membre comme étant le produit continuel des trois binomes qu'on ob-

tient en ôtant à l'inconnue chacune de ses valeurs.

Soit a une des racines de l'équation $x^3-p'x^2+p''x-p'''=0$; de manière qu'on ait $a^3-p'a^2+p''a-p'''=0$. Soit divisé le premier membre $x^3-p'x^2+p''x-p'''$ par $x-a$; on obtient pour quotient, $xx-(p'-a)x+p''-p'a+a^2=0$. Dans ce quotient $p'-a$ est la somme des deux racines restantes; j'affirme que $p''-p'a+a^2$, est leur produit; en effet, puisque

$$a^3-p'a^2+p''a-p'''=0\,;\ \frac{p'''}{a}=p''-p'a+a^2\,;$$

mais $\frac{p'''}{a}$ est le produit des deux racines restantes, donc ce produit est aussi $p''-p'a+a^2$. Partant, a, b, c, étant les trois racines de l'équation $x^3-p'x^2+p''x-p'''=0$; le premier membre est divisible par chacun des binomes $x-a$, $x-b$, $x-c$. Réciproquement, pour que le premier membre soit divisible par un binome $x-a$, il faut qu'on ait $a^3-p'a^2+p''a-p'''=0$ (§ 235); et partant, il faut que a soit une des racines de l'équation. Je vais envisager sous le même point de vue l'origine des équations du quatrième degré.

§ 258. On demande quatre quantités x, y, z, v, en connoissant leur somme p', la somme de leurs produits deux à deux p''; la somme de leurs produits trois à trois p''', et leur produit continuel p^{IV}. On a les quatre

$$\text{équations}\left\{\begin{array}{ll} x+y+z+v & =p'. \\ xy+xz+xv+yz+yv+zv & =p''. \\ xyz+xyv+xzv+yzv & =p'''. \\ xyzv & =p^{\text{IV}}. \end{array}\right.$$

Soient multipliés les membres des trois premieres équations par x^3, par x^2, et par x respectivement : et après ces changemens soient pris les membres des quatre équations alternativement en plus et en moins, on obtient : $x^4=p'x^3-p''x^2+p'''x-p^{\text{IV}}$; ou $x^4-p'x^3+p''x^2-p'''x+p^{\text{IV}}=0$. On obtiendroit des équations semblables dans chacune des trois autres inconnues y, z, v. Partant, l'une de ces quatre équations telle que la première $x^4-p'x^3+p''x^2-p'''x+p^{\text{IV}}=0$, équivaut à chacune d'elles, et elle contient les valeurs de chacune des quatre quantités cherchées. L'inconnue x dans l'équation $x^4-p'x^3+p''x^2-p'''x+p^{\text{IV}}=0$, a donc quatre valeurs, telles, que l'une de ces valeurs étant prise pour celle de x comme déterminée, les trois autres valeurs sont respectivement

celles de y, de z et de v. Ainsi, si on désigne par a, b, c, d, les valeurs de x qui satisfont à l'équation $x^4-p'x^3+p''x^2-p'''x+p^{IV}=0$; on a, $a+b+c+d=p'$, $ab+ac+ad+bc+bd+cd=p''$, $abc+abd+acd+bcd=p'''$, $abcd=p^{IV}$. Partant, dans une équation du quatrième degré dont les termes sont ordonnés suivant les puissances de l'inconnue, dans laquelle le coefficient du premier terme est l'unité, et dont le second membre est zéro; le coefficient du second terme est égal à la somme des quatre racines, le coefficient du troisième terme est égal à la somme de leurs produits deux à deux, le coefficient du quatrième terme est égal à la somme de leurs produits trois à trois; et le quatrième terme est leur produit continuel; les signes de ces termes sont alternativement conformes et contraires aux signes des sommes données.

Soient a, b, c, d, les quatre racines de l'équation du quatrième degré $x^4-p'x^3+p''x^2-p'''x+p^{IV}=0$. Le produit continuel des binomes $x-a$, $x-b$, $x-c$, $x-d$, est conforme au premier membre de cette équation; et partant, ce premier membre est le même que ce produit.

Soit a une des racines de l'équation proposée, de manière qu'on ait $a^4 - p'a^3 + p''a^2 - p'''a + p^{IV} = 0$. Soit divisé le premier membre de l'équation par $x - a$, les coefficiens des termes successifs du quotient x^3, x^2, x', x^0; sont $1, p' - a, p'' - p'a + a^2, p''' - p''a + p'a^2 - a^3$; et il reste $p^{IV} - p'''a + p''a^2 - p'a^3 + a^4$; mais par supposition ce reste est zéro; donc le quotient exact est $x^3 - (p' - a)x^2 + (p'' - p'a + a^2)x - (p''' - p''a + p'a^2 - a^3)$. Dans ce quotient $p' - a$ est la somme des trois racines restantes; $p'' - p'a + a^2$ est la somme de leurs produits deux à deux; j'affirme que $p''' - p''a + p'a^2 - a^3$, est leur produit continuel; en effet, puisque $a^4 - p'a^3 + p''a^2 - p'''a + p^{IV} = 0$; $\frac{p^{IV}}{a} = p''' - p''a + p'a^2 - a^3$; mais $\frac{p^{IV}}{a}$ est le produit des trois racines restantes, donc ce produit est aussi $p''' - p''a + p'a^2 - a^3$ Réciproquement, pour que le premier membre soit divisible par le binome $x - a$, on doit avoir $a^4 - p'a^3 + p''a^2 - p'''a + p^{IV} = 0$; et partant, a est une des racines de l'équation.

Les deux exemples que je viens d'exposer relatifs à la composition des équations du troisième et du quatrième degré, doivent être regardés comme une introduction à l'origine

et

et à la composition des équations en général.

§259. *Lem.* Soient $p', p'', p''', p^{IV} \ldots p^{N-1}, p^{N}$; les sommes des produits de 1, 2, 3, 4, ...$n-1$, n, dimensions, faits avec n lettres.

Soient $P', P'', P''', P^{IV} \ldots P^{N-1}, P^{N}$; les sommes des produits des mêmes nombres de dimensions faits avec ces lettres, et une de plus que je désignerai par a; et soit $P^{N-1} = ap^{N}$, le produit continuel de toutes ces lettres; on a toutes les équations suivantes :

$$P' = p' + a \qquad p' = P' - a$$
$$P'' = p'a + p'' \qquad p'' = P'' - P'a + a^{2}$$
$$P''' = p''a + p''' \qquad p''' = P''' - P''a + P'a^{2} - a^{3}$$
$$P^{IV} = p'''a + p^{IV} \qquad p^{IV} = P^{IV} - P'''a + P''a^{2} - P'a^{3} + a^{4}$$

. . . .

. . . .

. . . .

$$P^{N-1} = p^{N-II}a + p^{N-1} \qquad p^{N-1} = P^{N-1} - P^{N-II}a \ldots \pm P'a^{n-2} \mp a^{n-1}$$
$$P^{N} = p^{N-1}a + p^{N} \qquad p^{N} = P^{N} - P^{N-1}a \ldots \pm P''a^{n-2} \mp P'a^{n-1} \pm a^{n}$$
$$ap^{N} = P^{N}a - P^{N-1}a^{2} \ldots \pm P''a^{n-1} \mp P'a^{n} \pm a^{n+1}.$$

Soit proposée la question : trouver n quantités, en connoissant leur somme p', la somme de leurs produits deux à deux p'', la somme de leurs produits trois à trois p''', ... la somme

de leurs produits de $n-1$ dimensions p^{N-1}, et leur produit continuel p^N.

Que chaque inconnue soit désignée par un caractère particulier, que l'une d'elles soit x. Soient établies toutes les équations successives conformément aux conditions énoncées et dans l'ordre de ces conditions. Soient multipliés les membres de ces équations successives à commencer par la première jusqu'à l'avant dernière, par des puissances de l'inconnue x, telles que l'exposant de la première est inférieur d'une unité au nombre des inconnues, et que leurs exposans diminuent successivement d'une unité. Après ces changemens, soient pris les membres de toutes les équations successives alternativement en plus et en moins; on obtient l'équation,

$$x^n = p'x^{n-1} - p''x^{n-2} + p'''x^{n-3} \ldots \pm p^{N-1}x \mp p^N; \text{ ou}$$

$$x^n - p'x^{n-1} + p''x^{n-2} - p'''x^{n-3} \ldots \mp p^{N-1}x \pm p^N = 0.$$

On obtiendroit une équation semblable dans chacune des autres inconnues; ainsi cette équation représente chacune d'elles, et les valeurs de cette inconnue dans cette équation doivent satisfaire à chacune de ces équations. Les racines de cette équation sont donc en

nombre égal à celui des inconnues ou au degré de l'équation.

Dans l'équation obtenue, le coefficient du second terme est la somme de toutes les racines; le coefficient du troisième terme est la somme de leurs produits deux à deux; le coefficient du quatrième terme est la somme de leurs produits trois à trois; . . . et ainsi de suite jusqu'au coefficient du n^{me} terme qui est la somme des produits de $n-1$ dimensions faits avec les racines, le dernier terme étant leur produit continuel. Les signes des termes impairs à compter depuis le premier sont conformes aux signes de leurs coefficiens donnés, et les signes des termes pairs sont contraires aux signes de leurs coefficiens donnés.

Soient désignées par $a, b, c, d, \ldots l, m$, les racines de l'équation obtenue, en sorte qu'on ait toutes les équations, $x=a$, $x=b$, $x=c$, $x=d$, ... $x=l$, $x=m$; et soit pris le produit continuel des binomes $x-a$, $x-b$, $x-c$, $x-d$, ... $x-l$, $x-m$; ce produit est conforme au premier membre de l'équation obtenue; et partant; ce premier membre est le produit continuel de tous ces binomes.

Soit a une des valeurs de x qui satisfait

à l'équation obtenue ; de manière qu'on ait $a^n - p'a^{n-1} + p''a^{n-2} - p'''a^{n-3} \ldots \pm p^{\text{N}-1}a \mp p^{\text{N}} = 0$. Soit divisé le premier membre $x^n - p'x^{n-1} + p''a^{n-2} - p'''x^{n-3} \ldots \mp p^{\text{N}-1}x \pm p^{\text{N}}$ par $x-a$; les termes successifs du quotient contiennent des puissances de x dont les exposans vont successivement en diminuant en diminuant depuis n-1 jusqu'à zéro ; et leurs coefficiens sont respectivement, l'unité, $p'-a$, ou la somme des racines restantes $p''-p'a+a^2$, ou la somme des produits de ces racines deux à deux, $p'''-p''a+p'a^2-a^3$ ou la somme des des produits de ces racines trois à trois, $p^{\text{IV}}-p'''a+p''a^2-p'a^3+a^4$ ou la somme de leurs produits quatre à quatre, ... $p^{\text{N-II}}-p^{\text{N-III}}a \ldots \mp p'a^{n-3} \pm a^{n-2}$, ou la somme des produits de ces racines de n-2 dimensions, et enfin $p^{\text{N}-1}p^{\text{N-II}}a+p^{\text{N-III}}a^2 \ldots \pm p'a^{n-2} \mp a^{n-1}$ qui est leur produit continuel. Partant, l'équation formée en égalant ce quotient à zéro contient les valeurs restantes de l'inconnue.

§ 260. Ce que nous venons de trouver sur la composition du produit d'un nombre quelconque de binomes $x-a$, $x-b$, $x-c$, ... s'applique en particulier au cas où tous les binomes sont égaux entr'eux; et fournit une démonstration du théorème binomial pour un

exposant entier et positif, qui n'est qu'un cas particulier de ce produit.

En effet, puisque p' est la somme de toutes les racines dont le nombre est n; si toutes les racines sont égales entr'elles, et désignées par a, $p'=na$; de même, p'' étant la somme de tous les produits des racines deux à deux, le nombre des termes dont p'' est composé est $\frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}$; lorsque toutes les racines a sont égales entr'elles, $p''=\frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}a^2$. De même, p''' étant la somme de tous les produits des racines trois à trois; le nombre des termes dont p''' est composé est $\frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}$; soient toutes les racines a égales entr'elles, on a $p'''=\frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}a^3$. Dans la même supposition, on a successivement :

$$p^{\text{IV}}=\frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}\ldots\frac{n-3}{4}a^4;\ p^{\text{V}}=\frac{n}{1}\ldots\frac{n-4}{5}a^5;$$

$$p^{\text{VI}}=\frac{n}{1}\ldots\frac{n-5}{6}a^6,\ldots p^{\text{N}-\text{I}}=\frac{n}{1}a^{n-1};\ p^{\text{N}}=a^n.$$

§ 261. Ce qui a été établi sur la composition des équations est indépendant de la

nature de leurs racines, ou de la forme des binomes $x—a$, $x—b$, $x—c\ldots$, dont le premier membre est le produit. Ces binomes peuvent être tous réels, ou en partie réels et en partie imaginaires. Dans le cas où les racines ne sont pas toutes réelles, ceux de ces facteurs qui sont imaginaires se combinent deux à deux, de manière à produire des facteurs trinomes réels (§ 188); partant, le nombre des racines imaginaires d'une équation est toujours pair.

Cor. 1er. Dans une équation dont le degré est impair, 1, 3, 5,..., $2n—1$; il y a au moins une racine réelle.

Cor. 2d. Dans une équation dont le degré est pair, 2, 4, 6,... $2n$; et dont le dernier terme a le signe —, il y a au moins deux racines réelles. En effet, le premier membre est le produit continuel des trinomes formés par les binomes différens entr'eux dont il est aussi le produit continuel: pour que le dernier terme soit précédé du signe —, il faut qu'il y ait un nombre impair de ces trinomes dans lesquels le signe du troisième terme soit aussi —; mais tout trinome dans lequel le signe du troisième terme est —, est le produit de deux binomes réels, ou a deux

racines réelles (§ 110) ; donc aussi, toute équation paire dans laquelle le signe du dernier terme est —, a au moins deux racines réelles.

Cor. 3me. Lorsque dans une équation le dernier terme est zéro ; de manière que tous les termes sont affectés du facteur x, une des valeurs de x dans cette équation est zéro ; si les deux derniers termes évanouissent, de manière que tous les termes aient le facteur x^2 ; c'est une preuve qu'il y a deux valeurs de x qui sont zéro ; et en général, si tous les termes sont affectés de la puissance m^{me} de l'inconnue, c'est une preuve qu'il y a m valeurs de l'inconnue qui sont zéro ; et réciproquement, l'inconnue ne peut avoir deux, trois.... m valeurs égales entr'elles, qu'autant que tous les termes de l'équation sont affectés du facteur x^2, x^3,... x^m.

§ 262. Lorsque chacun des binomes dont le produit continuel forme le premier membre d'une équation est la différence de ses termes, ou lorsque toutes les racines de l'équation sont positives, les signes de ses termes alternent, et partant, le nombre des changemens de signes de deux termes successifs est alors égal au nombre des racines positives. Au contraire, lorsque chacun de ces binomes est la

V 4

somme de ses termes, ou lorsque toutes les racines sont négatives, tous les termes du premier membre ont le même signe +, et partant, le nombre des permanences de deux signes successifs est alors égal au nombre des racines négatives. Que les racines soient en partie positives et en partie négatives; DESCARTES a trouvé que le nombre des changemens de signes de deux termes successifs est égal au nombre des racines positives, et que le nombre des permanences de deux signes successifs est égal au nombre des racines négatives. Je vais éclaircir cette règle par un ou deux exemples, pour servir d'introduction à la démonstration générale.

1er. *Ex.* Soient deux binomes $x-a$, $x+b$, dont l'un $x-a$, est la différence de ses termes; dont l'autre $x+b$ est la somme de ses termes; et dont le produit est $xx-x(a-b)-ab$: si $a>b$, la succession des signes est $+--$; si $a<b$, cette succession est $++-$; il y a donc dans l'un et l'autre cas un changement de deux signes successifs et une permanence, de même que dans l'équation $xx-x(a-b)-ab=0$, il y a une racine positive et une racine négative.

2^{d}. *Ex.* 1°. Soient trois binomes $x-a$, $x-b$,

$x+c$, dont deux sont les différences de leurs termes et dont le troisième est la somme de ses termes; leur produit est $x^3-(a+b-c)x^2+(ab-ac-bc)x+abc$. Si on a en même tems $a+b>c$, $ab>c(a+b)$, l'ordre des signes est $+-++$. Soit $a+b<c$; on a aussi $(a+b)^2<c(a+b)$, et à plus forte raison $ab<c(a+b)$; donc l'ordre des signes est $++-+$. Il y a donc dans l'un et l'autre cas deux changemens de signes successifs et une permanence, de même que l'équation dans laquelle le premier membre est le produit continuel de ces binomes égalé à zéro a deux racines positives et une négative.

2°. Soient trois binomes $x+a$, $x+b$, $x-c$, dont deux sont les sommes de leurs termes et dont le troisième est la différence de ses termes. Leur produit est $x^3+xx(a+b-c)+x(ab-ac-bc)-abc$. Soit en même tems, $a+b>c$, $ab>c(a+b)$, la suite des signes est $+++-$; soit $a+b<c$, $(a+b)^2<c(a+b)$, et à plus forte raison $ab<c(a+b)$, la suite des signes est $+---$. Il y a donc, dans l'un et l'autre cas, deux permanences de signes successifs et un changement de ces signes, de même qu'il y a deux racines négatives et une positive dans

l'équation dont le premier membre est le produit continuel de ces binomes égalé à zéro. Je passe au développement de la proposition générale.

Soit $x^n \pm p'x^{n-1} \pm p''x^{n-2} \pm p'''x^{n-3} .. + p^{N-1}x \pm p^N$, une fonction entière de x désignée par X, à multiplier par le binome $x+a$ qui est la somme de ses termes. On a

produit par x;

$$x^{n+1} \pm p'x^n \pm p''x^{n-1} \pm p'''x^{n-2} .. \pm p^{N-1}x^2 \pm p^N x$$

produit par a;

$$ax^n \pm ap'x^{n-1} \pm ap''x^{n-2} \cdots \pm ap^{N-II}x^2 \pm ap^{N-1}x \pm ap^N.$$

Pour abréger; soient désignés par P et par P' le premier et le second de ces produits partiels; et soit X' le produit total. Dans l'addition des produits P et P', pour obtenir le produit total X', si les termes de X' sont constamment affectés du même signe que les termes correspondans de P ou de X, jusqu'à l'avant dernier terme de P' ou de X'; les signes de X' jusqu'à ce terme se suivent dans le même ordre que les signes de X; il y a donc à cet égard, le même nombre de permanences, et le même nombre de changemens de signes successifs dans X et dans X'. Mais, le dernier terme ap^N de X' a le même

signe que le dernier terme de P′ ou de X; et partant, il y a dans X′ une permanence de signes de plus qu'il n'y en a dans X.

Que la fonction X soit multipliée par le binome $x-a$, qui est la différence de ses termes; les signes des termes du produit P′ sont contraires aux signes des termes de X desquels ils proviennent, et en particulier le signe du dernier terme de P′ ou de X′ est contraire au signe du dernier terme de X. Partant, si les signes de tous les termes de X′ qui précèdent le dernier sont conformes aux signes des termes correspondans de P ou de X, l'addition du dernier terme de P′ introduit dans X′ un changement de deux signes successifs de plus qu'il n'y en a dans X.

Soient L, M, deux termes successifs de X; soient l, m, les deux termes correspondans du produit partiel P; soient l', m', les termes correspondans à ces derniers du produit partiel P′; de manière que m' provient de L; et soient L′ et M′ les termes correspondans du produit total X′. Soit le multiplicateur $x+a$: aussi long-tems que les signes des termes du produit P ou de X sont les mêmes que les signes des termes corres-

pondans du produit P', ou que ces signes étant différens les coefficiens des termes du premier produit sont plus grands que les coefficiens des termes correspondans du second; les termes correspondans de X et de X' ont les mêmes signes; et partant, à cet égard, il y a le même nombre de permanences et le même nombre de changemens de signes dans X et dans X'. Soit m et m' la première paire de termes correspondans de P et de P', tels, que le coefficient de m' soit plus grand que le coefficient de m; dans le produit X' le terme correspondant M' a le même signe que m' ou L, et partant, par le passage des signes de P aux signes de P' dans le produit X', il s'introduit dans X' une permanence de signes à la place d'une diversité qui étoit dans X. Aussi long-tems que les termes de P' qui suivent m' ont les mêmes signes que les termes correspondans de P ou X, ou que ces signes étant différens les coefficiens de P' sont plus grands que les coefficiens correspondans de P; à cet égard, il y a dans la suite des termes de X' et de X la même succession de signes. Mais, si on vient à un terme de P' qui avec un coefficient plus petit que le coefficient du terme correspondant de P ait un signe différent,

le signe du terme correspondant de X′ sera le même que le signe du terme correspondant de P, il sera donc différent de celui du terme précédent de X′; et partant, le retour quant aux signes du produit P′ au produit P amène un changement de signes successifs dans le produit X′. En général, le passage du produit P au produit P′ quant aux signes des termes du produit X′ introduit une permanence de signes successifs; et le retour du produit P′ au produit P, quant aux signes des termes du produit X′ ramène un changement de signes de deux termes successifs. Mais, le dernier terme de P′ et de X′ ayant le même signe que le dernier terme de P, le nombre des premiers passages est plus grand d'une unité que celui des seconds; donc aussi, le nombre des permanences de signes est plus grand d'une unité dans X′ qu'il ne l'est dans X: et partant, l'introduction d'une racine négative augmente d'une unité le nombre des permanences de deux signes successifs.

On montre, au contraire, par un raisonnement tout à fait semblable (*mutatis mutandis*), que le produit par un binome $x-a$, ou l'introduction d'une racine positive, introduit dans X′ un changement de signes

successifs de plus que dans X. Savoir, le passage de P à P′ introduit un changement de signes de deux termes successifs, tandis que le retour de P′ à P introduit une permanence de signes. Mais, le dernier terme de X′ a un signe différent de celui du dernier terme de X ; donc, le nombre des premiers passages est plus grand d'une unité que celui des seconds, et partant, l'introduction d'une racine positive augmente d'une unité le nombre des changemens de signes de deux termes successifs.

Puisque dans les équations du troisième degré le nombre des permanences et le nombre des changemens de deux signes successifs sont respectivement les mêmes que les nombres des racines négatives et positives de ces équations (2[d]. *Ex.*) : cela a lieu aussi dans les équations du quatrième degré ; de là, dans celles du cinquième, puis dans celles du sixième, et ainsi de suite ; donc enfin, dans toute équation le nombre des changemens de signes et celui des permanences de deux termes successifs, sont respectivement les mêmes que les nombres des racines positives et des racines négatives de cette équation.

Rem. Cette proposition s'étend seulement aux équations dont toutes les racines sont

réelles ; les racines imaginaires ne pouvant être dites ni positives ni négatives. Ainsi, $(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})=xx+2ax+(aa+bb)$; et partant, quoique le multiplicateur $x+a-b\sqrt{-1}$ paroisse exprimer une différence de ses termes, il n'y a dans le produit que des permanences de signes successifs. La démonstration pour les équations cubiques, qui est un des fondemens de la proposition générale, repose sur la proposition que $ab<(a+b)^2$; or, cette inégalité est généralement vraie seulement pour les quantités réelles. En effet, soit $a=\beta\sqrt{-1}+\alpha$, $b=\beta\sqrt{-1}-\alpha$; $a+b=2\beta\sqrt{-1}$, $ab=-(\beta\beta+\alpha\alpha)$; $(a+b)^2=-4\beta\beta$; $ab-(a+b)^2=3\beta\beta-\alpha\alpha$; et partant, lorque $3\beta\beta>\alpha\alpha$, $ab>(a+b)^2$.

Je vais éclaircir par un ou deux exemples le développement de la règle précédente.

1°. Soit $X=4x^5+3x^4-7x^3-5x^2+26x-160$.

$x+5$ multiplicande.

$$P=4x^6+3x^5-7x^4-5x^3+26x^2-160x$$
$$P'=\quad 20x^5+15x^4-35x^3-25x^2+130x-800$$
$$X'=4x^6+23x^5+8x^4-40x^3+x^2-30x-800.$$

Dans cet exemple, il y a deux passages des signes de P aux signes de P′, savoir du second terme au troisième et du sixième au septième ; et il y a un retour des signes de P

aux signes de P, savoir, du quatrième terme au cinquième : il y a donc un passage de plus de P à P′ que de P′ à P. Il y a dans X deux successions de signes semblables et trois changemens de signes successifs, il y a dans X′ trois successions de signes semblables et trois changemens de signes successifs, la multiplication par la somme $x+5$, ou l'addition d'une racine négative, introduit dans le produit X′ une permanence de deux signes successifs de plus qu'il n'y en a dans X.

2°. Soit $X = x^5 + 3x^4 + 5x^3 - 4x^2 - 12x + 13$

$$\begin{array}{rl} & x-2 \quad \text{multiplicateur} \\ P = & x^6 + 3x^5 + 5x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 13x \\ P' = & \quad\; - 2x^5 - 6x^4 - 10x^3 + 8x^2 + 24x - 26 \\ X' = & x^6 + x^5 \qquad\qquad\qquad\; - 4x^2 + 37x \\ & \qquad\quad - x^4 - 14x^3 \qquad\qquad\quad - 26. \end{array}$$

Pour obtenir le produit X′, il y a deux passages de P à P′, et un retour de P′ à P. Il y a dans X trois successions de signes semblables et deux de signes différens; il y a dans X′ le même nombre de successions de signes semblables, et une succession de plus de deux signes différens. La multiplication par la différence $x-2$, ou l'addition d'une racine positive, augmente d'une unité le nombre des successions de deux signes différens.

§ 263.

§ 263. Comme le produit continuel des binomes $x+a$, $x+b$, $x+c$, $x+d$, ... diffère du produit continuel des binomes $x-a$, $x-b$, $x-c$, $x-d$, seulement par les signes des termes qui contiennent des puissances impaires de l'inconnue : on change les signes de toutes les racines d'une équation en changeant les signes des termes qui contiennent des puissances impaires de l'inconnue ; les signes des termes qui contiennent des puissances paires restant les mêmes.

Corol. Si on multiplie le premier membre de la première équation par celui de l'équation provenue de ce changement, on obtient une équation dont les racines sont les carrés des racines de la première.

Ex. Soit l'équation $xx-p'x+p''=0$; de laquelle on tire l'équation $xx+p'x+p''=0$; produit $x^4+(2p''-p'^2)xx+p''^2=0$; ou faisant $xx=z$; $z^2-(p'^2-2p'')z+p''^2=0$. Si on fait sur cette équation le même changement, on obtient une équation dont les racines sont les quatrièmes puissances de celles de la première; et ainsi de suite ; pour toutes les puissances à exposans égaux à quelques puissances de 2.

Rem. Si la première équation a toutes ses racines réelles, la seconde a toutes ses ra-

cines positives, ou les signes alternent dans tous les termes : si cela n'a pas lieu dans cette dernière équation, la première n'a pas toutes ses racines réelles.

Ex. Soit l'équation $x^3-5x^2+15x-14=0$; soient changés les signes des puissances impaires de x; on a $-x^3-5x^2-15x-14=0$, ou $x^3+5x^2+15x+14=0$. Le produit de cette dernière quantité et de la première est $x^6+5x^4+85x^2-196=0$; soit $xx=z$; $z^3+5z^2+85z-196=0$; cette équation n'a pas toutes ses racines positives, donc la première n'a pas toutes ses racines réelles.

§ 264. Une équation étant proposée; on peut toujours la ramener à une autre équation dont les racines diffèrent de celles de la première d'une quantité donnée e.

Ex. Soit l'équation $x^3-p'x^2+p''x-p'''=0$. Soit fait $x=z+e$; ou $z=x-e$; on aura une équation en z dont les racines différeront de celles de la première de la quantité e. En effet,

$$x^3=z^3+3ezz+3eez+e^3$$
$$p'x^2=p'(\quad zz+2ez+e^2)$$
$$p''x=p''(\quad z+e)$$

et partant on a:

$$z^3+(3e-p')z^2+(3ee-2p'e+p'')z+(e^3-p'e^2+p''e-p''')=3;$$

pour abréger, soit cette dernière équation

$z^3 + \mathrm{P}' z^2 + \mathrm{P}'' z + \mathrm{P}''' = 0$. Le dernier terme P''' provient de l'équation proposée en substituant dans celle-ci e à x. Le terme P'' provient de P''' en multipliant chaque terme de P''' par l'exposant de e dans ce terme, et en divisant les produits par e. Le terme P' provient de P'' en multipliant chaque terme de P'' par l'exposant de e dans ce terme, et en divisant les produits per $2e$; enfin le coefficient du premier terme est l'unité, et on l'obtient aussi en multipliant chaque terme de P' par l'exposant de e dans ce terme, et en divisant les produits par $3e$.

Généralement, soit l'équation

$$x^{n} - p' x^{n-1} + p'' x^{n-2} - p''' x^{n-3} \ldots \pm p^{\mathrm{N-II}} x^2 \mp p^{\mathrm{N-I}} x \pm p^{\mathrm{N}} = 0.$$

Soit fait $x = z + e$; et soit,

$$z^{n} + \mathrm{P}' z^{n-1} + \mathrm{P}'' z^{n-2} + \mathrm{P}''' z^{n-3} \ldots + \mathrm{P}^{\mathrm{N-II}} z^2 + \mathrm{P}^{\mathrm{N-I}} z + \mathrm{P}^{\mathrm{N}} = 0;$$

l'équation qui en résulte. P^{N} provient de la première équation en substituant e à x; $\mathrm{P}^{\mathrm{N-I}}$ provient de P^{N} en multipliant chaque terme de P^{N} par l'exposant de e dans ce terme, et en divisant les produits par e; $\mathrm{P}^{\mathrm{N-II}}$ provient de $\mathrm{P}^{\mathrm{N-I}}$ en multipliant chaque terme de $\mathrm{P}^{\mathrm{N-I}}$ par l'exposant de e dans ce terme, et en divisant chaque produit par $2e$; $\mathrm{P}^{\mathrm{N-III}}$ provient

de $\text{P}^{\text{N-II}}$ en multipliant chaque terme de $\text{P}_{\text{N-II}}$ par l'exposant de e dans ce terme, et en divisant chaque produit par $3e$; et ainsi de suite; jusqu'à ce qu'on parvienne au coefficient du second terme $ne+p'$; puis au coefficient du premier terme qui est l'unité : si e change de signe, on changera le signe de chaque puissance impaire de e : cette règle découle immédiatement de la formation des puissances du binome.

Ex. Soit $x^4-p'x^3+p''x^2-p'''x+p^{\text{IV}}=0$. Soit $z^4+\text{P}'z^3+\text{P}''z^2+\text{P}'''z+\text{P}^{\text{IV}}=0$, l'équation qui provient de la substitution de $z\pm e$ à x.

1°. Soit $x=z+e$	2d. Soit $x=z-e$
$\text{P}^{\text{IV}}=e^4-p'e^3+p''e^2-p'''e+p^{\text{IV}}$	$\text{P}^{\text{IV}}=e^4+p'e^3+p''e^2+p'''e+p^{\text{IV}}$
$\text{P}'''=4e^3-3p'e^2+2p''e-p'''$	$\text{P}'''=-(4e^3+3p'e^2+2p''e+p''')$
$\text{P}''=6e^2-3p'e+p''$	$\text{P}''=6e^2+3p'e+p''$
$\text{P}'=4e-p'$	$\text{P}'=-(4e+p')$
$\text{P}^{\text{o}}=1$	$\text{P}^{\text{o}}=1.$

§ 265. De là, on peut toujours ramener une équation à n'avoir point de second terme. Pour cela, soit divisé le coefficient du second terme par le degré de l'équation, et soit substitué à l'inconnue une autre inconnue augmentée ou diminuée de ce quotient suivant que le signe du second terme est $-$ ou $+$.

Ex. Soit $x^3-6x^2+11x-6=0$; soit fait $x=z+2$;
on obtient $z^3 \quad -z \quad =0$.

Soit $x^4+8x^3-10x^2-104x+105=0$. Soit $x=z-2$;
on obtient $z^4 \quad -34z^2 \quad +225=0$.

On peut aussi chasser un terme différent du second, mais pour cela, on doit résoudre une équation d'un degré d'autant plus élevé que le terme qu'on veut chasser est plus éloigné du premier; en particulier, pour chasser le troisième terme, on doit rèsoudre l'équation $\frac{m}{1}.\frac{m-1}{2}e^2-\frac{m-1}{1}p'e+p''=0$.

§ 266. Lorsqu'une équation est dégagée d'un de ses termes, par exemple du second, on peut concevoir la place de ce terme, précédée de l'un ou de l'autre des deux signes + ou —; et de là, on peut quelquefois juger si une équation peut avoir toutes ses racines réelles, ou si quelques-unes d'elles sont imaginaires.

Une équation étant dégagée de son second terme, si le signe du troisième terme est +, les racines de cette équation ne peuvent pas être toutes réelles. En effet, les signes des termes qui suivent le troisième restant les mêmes, les deux successions de signes des trois premiers termes + + +, + — +,

donnent des nombres inégaux de racines positives et de racines négatives de l'équation, donc, les racines ne peuvent pas être toutes réelles. On peut confirmer cette conséquence, tirée de la succession des signes, par des considérations relatives à la nature des coefficiens. En effet, dans une équation qui manque de second terme, la somme des racines positives et la somme des racines négatives sont égales entr'elles; ou la somme de toutes les racines est zéro, et le carré de cette somme est aussi zéro. Or, ce carré est composé de la somme des carrés de toutes les racines et du double de la somme de leurs produits deux à deux: donc, la somme des produits des racines deux à deux est égale à la somme des carrés de toutes les racines prise négativement. Mais, si les racines sont toutes réelles, le carré de chacune d'elles est positif, et la somme de tous leurs carrés est positive; donc la somme de tous les produits deux à deux est négative; donc, les racines étant toutes réelles, le signe du troisième terme est —.

Ex. 1°. Soit l'équation $x^3+6x^2+15x+14=0$. Soit ôté le second terme en faisant $x=z-2$; on obtient $z^3+3z=0$. Les valeurs de z dans cette équation sont $0, \pm\sqrt{-3}$; et les valeurs

de x sont -2, $-2\pm\sqrt{-3}$; ensorte que $x^3+6x^2+15x+14=(x+2)(xx+4x+7)$.

2°. Soit $x^3-6x^2+15x-14=0$; soit $x=z+2$; on a, $z^3+3z=0$; valeurs de z, $0, \pm\sqrt{-3}$; valeurs de x, 2, $2\pm\sqrt{-3}$;
$x^3-6x^2+15x-14=(x-2)(xx-4x+7)$.

3°. Soit $x^4-8x^3+25x^2-36x+21=0$. Si les quatre racines de cette équation sont réelles, elles sont toutes positives. Soit ôté le second terme, en faisant $x=z+2$; on obtient $z^4 * +zz+1=(zz+z+1)(zz-z+1)=0$. Dans cette équation, les valeurs de z sont toutes imaginaires ; donc aussi toutes les valeurs de x dans l'équation proposée sont imaginaires ; on a,
$x^4-8x^3+25x^2-36x+21=(xx-3x+3)(xx-5x+7)$.

§ 267. Une équation étant proposée ; on peut toujours la transformer en une autre dont les racines vaillent un nombre proposé m de fois les racines de la première.

Soit, par exemple, $x^3-p'x^2+p''x-p'''=0$; soit fait $y=mx$; ou $x=\frac{1}{m}y$; on aura

$$\frac{1}{m^3}y^3-\frac{1}{m^2}p'y^2+\frac{1}{m}p''y-p'''=0\ ;$$

ou $y^3-mp'y^2+m^2p''y-m^3p'''=0$. Le coefficient du second terme de cette équation ou

la somme de ses racines vaut m fois le coefficient du second terme de la première ou la somme de ses racines. Le coefficient du troisième terme de l'équation en y, ou la somme des produits de ses racines deux à deux, vaut m^2 fois le coefficient du troisième terme de l'équation en x, ou la somme des produits de ses racines deux à deux. Le quatrième terme de l'équation en y, ou le produit continuel de ses racines, vaut m^3 fois le quatrième terme de l'équation en x ou le produit continuel de ses racines : il en est de même pour toute autre équation.

§ 268. Dans la manière dont nous avons exposé l'origine des équations, elles se présentent comme ayant l'unité pour coefficient du premier terme. Si le coefficient du premier terme n'est pas l'unité, on peut toujours ramener l'équation à une autre dans laquelle le coefficient du premier terme soit l'unité, en substituant à l'inconnue une autre inconnue, divisée par le coefficient du premier terme.

Soit, par exemple, $mx^3 - p'x^2 + p''x - p''' = 0$; soit fait $x = \frac{y}{m}$; on aura,

$$\frac{y^3}{m^2} - p'\frac{y^2}{m^2} + p''\frac{y}{m} - p''' = 0 ;$$

ou $y^3 - p'y^2 + mp''y - m^2p''' = 0$.

§ 269. Lorsqu'une équation a des termes fractionnaires, on peut la dégager des fractions en multipliant tous les termes par le produit continuel de leurs dénominateurs. Si cette opération introduit un coefficient au premier terme, on pourra le chasser par le § précédent.

Soit, par exemple, $x^3-\frac{p'}{m}x^2+\frac{p''}{n}x-\frac{p'''}{r}=0$;

on a aussi $mnrx^3-nrp'x^2+p''mrx-p'''mn=0$.

Soit $x=\frac{1}{mnr}y$; $y^3-nrp'y^2+p''m^2nr^2y-m^3n^3r^2p'''=0$.

Cette équation est dégagée de fractions et son premier terme a l'unité pour coefficient.

§ 270. On convertit une équation en une autre dont les racines sont les inverses de celles de la première, en substituant à l'inconnue le quotient qu'on obtient en divisant le dernier terme de l'équation par une autre inconnue.

Soit, par exemple, $x^3-p'x^2+p''x-p'''=0$;

soit fait $x=\frac{p'''}{y}$; on a,

$$\frac{p'''^3}{y^3}-p'.\frac{p'''^2}{y^2}+p''.\frac{p'''}{y}-p'''=0;$$

ou, $y^3-p''y^2+p'p'''y-p'''^2=0$.

§ 271. Si e est une racine de l'équation X; dans l'équation Y, provenue de la substitution de $y+e$ à x, le dernier terme évanouit, et partant, une des valeurs de y est zéro. Dans le même cas, si dans l'équation X l'inconnue a deux valeurs égales à e, y a deux valeurs égales à zéro; et partant, dans l'équation Y, tous les termes sont multipliés par y^2; donc, les deux derniers termes évanouissent l'un et l'autre, et partant, le coefficient de l'avant dernier terme de l'équation Y est aussi zéro; on a donc,

$$\frac{n}{1}e^{n-1}-\frac{n-1}{1}p'e^{n-2}+\frac{n-2}{1}p''e^{n-3}-\ldots\pm 2p^{N-II}e\mp p^{N-I}=0;$$

et puisqu'on suppose $x=e$; on a aussi,

$$\frac{n}{1}x^{n-1}-(n-1)p'x^{n-2}+(n-2)p''x^{n-3}-\ldots\pm 2p^{N-II}x\mp p^{N-I}=0.$$

Cette équation est d'un degré inférieur à celui de l'équation proposée.

Ainsi, dans une équation cubique, $x^3-p'x^2+p''x-p'''=0$; si l'inconnue x a deux racines égales, on a aussi l'équation $3x^2-2p'x+p''=0$; qui donne $x=\frac{p'\pm\sqrt{(p'^2-3p'')}}{3}$; de même, dans l'équation du quatrième degré $x^4-p'x^3+p''x^2-p'''x+p^{IV}=0$; si x a deux valeurs égales entr'elles, on a aussi l'équation, $4x^3-3p'x^2+2p''x-p'''=0$.

En effet, soit le premier membre $x^3-p'x^2+p''x-p'''$; divisible par $(x-e)^2$, et soit le quotient $x-q'$; on aura, $x^3-(2e+q')x^2+(2eq'+ee)x-eeq'=0$; de là,

on a les trois équations
$$2e+q'=p'$$
$$2eq'+ee=p''$$
$$eeq'=p'''.$$

Des deux premières on tire : $3ee=2p'e-p''$; ou $3ee-2p'e+p''=0$; partant, si x a deux valeurs égales à e, on a $3xx-2p'x+p''=0$.

De même, dans l'équation, $x^4-p'x^3+p''x^2-p'''x+p^{IV}=0$; que x ait deux valeurs égales l'une et l'autre à e. Dans l'équation Y, les deux derniers termes évanouissent, et partant, $4e^3-3p'e^2+2p''e-p'''=0$; ou $4x^3-3p'x^2+2p''x-p'''=0$; et partant, la détermination de la possibilité de deux racines égales dépend de la possibilité que l'équation proposée et cette dernière équation aient une racine commune.

En effet, que le binome $(x-e)^2$, soit un diviseur de l'équation proposée; et que le quotient soit $xx-q'x+q''$.

En égalant entr'eux les coefficiens des termes correspondans de l'équation proposée et du produit, on obtient :

$$2e + q' = p'$$
$$ee + 2eq' + q'' = p''$$
$$eeq' + 2eq'' = p'''$$
$$eeq'' = p^{IV}.$$

De la seconde et de la troisième équation soit chassé q''; on a, $2e^3 + 3eeq' = 2ep'' - p'''$; combinant cette équation avec la première; on a, $4e^3 = 3eep' - 2ep'' + p'''$; ou $4e^3 - 3eep' + 2ep'' - p''' = 0$. et partant, si $x = e$, $4x^3 - 3p'x^2 + 2p''x - p''' = 0$. Partant, si x a deux valeurs égales entr'elles, l'une d'elles est commune à l'équation proposée, et à l'équation $4x^3 - 3p'x^2 + 2p''x - p''' = 0$.

§ 272. La composition des équations développée dans le § 259 est la plus simple et la plus féconde en conséquences; aussi cherche-t-on à ramener à elle les autres manières dont on peut concevoir leur origine. Je vais en donner un exemple, tiré de la composition des équations dans les sommes des puissances de leurs racines, en montrant la liaison qui règne entre ces sommes, et les coefficiens des équations conformes à leur origine développée dans ce §.

Soient q', q'', q''', q^{IV} . . . . . q^{N-1}, q^N; les sommes des puissances des racines d'une équation, dont les exposans sont, 1, 2, 3, 4... $n-1$, n, respectivement. J'affirme qu'on a,

$q^{N}-p'q^{N-1}+p''q^{N-II}-p'''q^{N-III}\ldots\mp p^{N-1}q'\pm np^{N}=0.$

En effet, dans l'équation,

$x^{n}-p'x^{n-1}+p''x^{n-2}-p'''x^{n-3}\ldots\mp p^{N-1}x\pm p^{N}=0$;

soit substitué à x chacune de ses valeurs, et soit prise la somme des premiers membres de toutes les équations qui en résultent; on obtient

$q^{N}-p'q^{N-1}+p''q^{N-II}-p'''q^{N-III}\ldots\mp p^{N-1}q\pm np^{N}=0$,

conformément à l'assertion.

Soit multiplié le premier membre de l'équation proposée $x^{n}-p'x^{n-1}+p''x^{n-2}\ldots\mp p^{N-1}x\pm p^{N}=0$; par une puissance quelconque x^{r} de x, soit $n+r=m$. Dans l'équation qui en résulte soit faite la même substitution et la même addition que pour le cas précédent, on obtient

$q^{M}-p'q^{M-1}+p''q^{M-II}-p'''q^{M-III}\ldots\mp p^{N-1}q^{R+1}\pm p^{N}q^{R}=0$

Il reste à développer le cas où les exposans des puissances sont moindres que le degré de l'équation.

Soient P', P'', P''', $P^{IV}\ldots P^{N-II}$, P^{N-1}, P^{N}; les produits faits avec les n racines d'une équation et une de plus que je désignerai par a; dont les dimensions répondent aux indices de ces lettres. Soient aussi Q', Q'', Q''', $Q^{IV}\ldots Q^{N-1}$, Q^{N}, les sommes des puissances de toutes ces quantités dont les exposans répondent à ces in-

dices. Soit m un exposant plus petit que n. Relativement à l'équation,

$$x^n - p'x^{n-1} + p''x^{n-2} \ldots\ldots \mp p^{N-1}x \pm p^N = 0;$$

qu'on ait démontré l'équation,

$$q^M - p'q^{M-1} + p''q^{M-II} \ldots\ldots \mp p^{M-1}q' \pm mp^M = 0;$$

pour une valeur quelconque de m plus petite que n; j'affirme qu'on a aussi l'équation,

$$Q^M - P'Q^{M-1} + P''Q^{M-II} \ldots\ldots \mp P^{M-1}Q' \pm mP^M = 0.$$

Par supposition :

$$Q^M - a^m - p'(Q^{M-1} - a^{m-1}) + p''(Q^{M-II} - a^{m-2}) \ldots \mp p^{M-I}(Q' - a) \pm mp^M = 0;$$

$$\text{ou } \begin{matrix} Q^m - p'Q^{m-1} + p''Q^{m-II} - \ldots \mp p^{M-1}Q' \pm mp^M \\ -(a^m - p'a^{m-1} + p''a^{m-2} - \ldots \pm p^{M-1}a \end{matrix} = 0.$$

Dans la première suite soient substituées à p', p'', p''' .... p^{M-1}, p^M, leurs valeurs tirées du § 259. On obtient :

$$\begin{matrix} Q^M - P'Q^{M-1} + P''Q^{M-II} \ldots \mp P^{M-1}Q' \pm mP^M \\ + a(Q^{M-I} - p'Q^{M-II} \ldots \pm p^{M-II}Q' \mp mp^{M-1}) = 0: \\ - a(a^{m-1} - p'a^{m-2} \ldots \pm p^{M-II}a' \mp p^{M-I}) \end{matrix}$$

$$\text{ou } \begin{matrix} Q^M - P'Q^{M-I} + P''Q^{M-II} \ldots \mp P^{M-I}Q' \pm mP^M \\ + a(q^{M-1} - p'q^{M-II} \ldots \pm p^{M-II}q' \mp (m-1)p^{M-1}) \end{matrix} = 0.$$

Mais, par supposition, le coefficient de a est zéro. Donc,

$$Q^M - P'Q^{M-1} + P''Q^{M-II} \ldots \mp P^{M-1}Q' \pm mP^M = 0.$$

De là, on peut établir la proposition générale.

En effet, puisque $p' = q'$, $p'q' = q'^2 = q'' + 2p''$;

donc, $q'' - p'q' + 2p'' = 0$

De là, $q''' - p'q'' + p''q' - 3p''' = 0$

$q^{IV} - p'q''' + p''q'' - p'''q' + 4p^{IV} = 0$

$q^{V} - p'q^{IV} + p''q''' - p'''q'' + p^{IV}q' - 5p^{V} = 0$

et généralement,

$q^{M} - p'q^{M-I} + p''q^{M-II} \ldots \pm p^{M-II}q'' \mp p^{M-I}q' \pm mp^{M} = 0.$

§ 273. Dans les §§ 255 — 257, les équations relatives à plusieurs inconnues ont pu aisément être ramenées à une seule : mais, le procédé particulier à la nature des conditions énoncées qui a été employé, n'est pas susceptible de généralisation. Lorsque toutes les équations sont du premier degré, on peut déterminer immédiatement chaque inconnue; mais, la question est ordinairement plus compliquée lorsque les équations sont supérieures au premier degré. On a trouvé différens procédés pour diminuer successivement d'une unité le nombre des inconnues, et pour réduire toutes les équations à une seule renfermant aussi une seule inconnue; ou pour *éliminer* toutes les autres inconnues : je vais esquisser la marche de l'un d'eux, en débutant par des exemples simples, et en supposant d'abord qu'il n'y a que deux équations et deux inconnues.

Une équation compléte du second degré à deux inconnues contient, les carrés des deux inconnues, le produit de l'une par l'autre, leurs produits par des quantités connues, et un terme connu. Partant, cette équation est de la forme $xx+axy+bx+cyy+dy+e=0$. Pour abréger, soit $ay+b=p'$, $cyy+dy+e=p''$; on aura, $xx+p'x+p''=0$; de même une seconde équation du second degré entre les mêmes inconnues est généralement de la forme $xx+q'x+q''=0$; on demande d'éliminer x de ces deux équations. Soit P la première de de ces équations, et Q la seconde. Du premier membre de l'équation P soit retranché le premier membre de l'équation Q, on a

$$x(p'-q')+(p''-q'')=0; \; x=\frac{q''-p''}{p'-q'}.$$

On pourroit substituer à x cette valeur dans l'une ou dans l'autre des équations P et Q, mais le résultat se présente plus promptement sous une forme symétrique, en cherchant une autre valeur de x par les équations P et Q, on a, $x(x+p')=-p''$; $x(x+q')=-q''$; et de là,

$$\frac{x+p'}{x+q'}=\frac{p''}{q''}. \; x(q''-p'')=p''q'-p'q''; \; x=\frac{p''q'-p'q''}{q''-p''}.$$

Soient égalées entr'elles les deux valeurs trouvées

vées de x, on obtient $(q''-p'')^2=(p'-q')(p''q'-p'q'')$; et partant, une équation en y seulement.

Rem. 1re. Si les équations proposées P et Q sont seulement du second degré relativement à chacune des inconnues x et y, l'équation finale en y ne s'élève pas au-dessus du quatrième degré.

Rem. 2de. Le procédé par lequel on a éliminé x, est indépendant des dimensions de y dans chaque équation; mais l'équation en y est d'un degré d'autant plus élevé que les termes p', q', p'', q'', contiennent des puissances plus élevées de y. Si p'' contient, par exemple, la 3me, 4me, 5me puissance de y, le terme $(p''-q'')^2$ contiendra à cet égard la 6me, la 8me, la 10me puissance de y, et l'équation en y sera à cet égard de ces degrés respectivement.

Rem. 3me. Que xx ait dans chaque équation des coefficiens p et q, qui soient ou non des fonctions de y. On a, $pxx+p'x+p''=0$, $qxx+q'x+q''=0$. Pour chasser xx soient rendus égaux ses coefficiens, on obtient par la soustraction $x(p'q-pq')+(p''q-pq'')=0$; $x=\frac{pq''-p''q}{p'q-pq'}$.

Des équations $x(px+p')=-p''$, $x(qx+q')=-q''$;

on tire, $(px+p')q''=(qx+q')p''$; et $x=\frac{p''q'-p'q''}{pq''-p''q}$;
de là, $(pq''-p''q)^2=(p'q-pq')(p''q'-p'q'')$.

2d. *Ex.* Soient deux équations dans lesquelles une des inconnues x aït trois dimensions. Ces équations sont $x^3+p'x^2+p''x+p'''=0$. $x^3+q'x^2+q''x+q'''=0$. Des membres de la première équation soient retranchés ceux de la seconde; on obtient,

$$(p'-q')x^2+(p''-q'')x+p'''-q'''=0.$$

Les deux équations P et Q, donnent,

$x(xx+p'x+p'')=-p'''$; $x(xx+q'x+q'')=-q'''$;
de là, $q'''(xx+p'x+p'')=p'''(xx+q'x+q'')$.
ou $(q'''-p''')xx+(p'q'''-q'p''')x+p''q'''-p'''q''=0$.

Partant, les équations proposées qui étoient du troisième degré relativement à x sont ramenées à deux autres qui sont seulement du second degré relativement à la même inconnue; savoir, $(p'-q')x^2+(p''-q'')x+(p'''-q''')=0$, $(q'''-p''')x^2+(p'q'''-q'p''')x+p''q'''-p'''q''=0$.
On pourra donc (par le 1er. ex. *Rem.* 3me.), éliminer x de ces deux équations.

Rem. 1re. Que les deux premiers termes x^3 des deux équations proposées aient des coefficiens p et q; on chasse x^3 de l'une et de l'autre, en rendant égaux ces coefficiens.

Rem. 2de. Si une des équations est du troi-

sième degré quant à x; et si l'autre équation est seulement du second degré quant à la même inconnue; on multipliera par x la seconde équation, et le procédé sera le même que pour le premier cas.

On procédera de même, pour ramener deux équations du quatrième degré quant à une des inconnues x, à deux équations du troisième degré quant à la même inconnue; et en général, deux équations entre deux inconnues, et d'un certain degré pour l'une d'elles, étant proposées, on peut toujours les ramener (par le procédé précédent) à deux équations entre ces inconnues d'un degré inférieur d'une unité à l'égard de cette inconnue.

§ 274. En suivant le même procédé, on diminue successivement d'une unité le nombre des inconnues et celui des équations données entre ces inconnues. Il me suffira d'en exposer un seul exemple relatif à trois équations et à trois inconnues, qui sont chacune du second degré pour l'une d'elles x.

Soient ces trois équations,

$\mathrm{P}=xx+p'x+p''=0$, $\mathrm{Q}=xx+q'x+q''=0$, $\mathrm{R}=xx+r'x+r''=0$, dans lesquelles p', p'', q', q'', r', r'', sont des fonctions de deux autres inconnues y et z.

Des membres de P soient retranchés les membres de Q et de R ; on a, $x(p'-q')=q''-p''$; $x(p'-r')=r''-p''$; de là, $(p'-q')(r''-p'')=(p'-r')(q''-p'')$. Des équations P et Q soient tirées les équations

$x(p'+x)=-p''$, $x(q'+x)=-q''$; de là, $\frac{p'+x}{q'+x}=\frac{p''}{q''}$,

$x(q''-p'')=p''q'-p'q''$; $x=\frac{p''q'-p'q''}{q''-p''}$. De même

des équations P et R on tire, $x=\frac{p''r'-p'r''}{r''-p''}$;

et de là, $(r''-p'')(p''q'-p'q'')=(p''r'-p'r'')(q''-p'')$. On a donc deux équations entre des fonctions de y et de z, et partant, le cas de trois inconnues est réduit au cas de deux inconnues seulement.

Je crois devoir me contenter de cette exposition de la possibilité de diminuer successivement le nombre des inconnues et celui des équations, et de ramener finalement un nombre quelconque d'équations entre le même nombre d'inconnues, à une seule équation contenant une seule inconnue.

Ce procédé général admet souvent des simplifications dans des cas particuliers : je vais l'éclaircir par quelques exemples.

1°. Trouver deux nombres en connoissant

la somme de leurs carrés q'', et la somme de leurs cubes q'''.

Soient les nombres cherchés x et y.

Cond. $\begin{cases} xx+yy = q''. \\ x^3+y^3 = q'''. \end{cases}$

Réd. $\begin{cases} x^3+xyy=q''x \\ x^3+y^3=q''' \end{cases}$ $xyy-y^3=q''x-q'''$; $x=\dfrac{q'''-y^3}{q''-yy}$.

Mais puisque, $xx=q''-yy$; $x=\dfrac{(q''-yy)^2}{q'''-y^3}$; de là, $(q'''-y^3)^2=(q''-yy)^3$. On auroit aussi obtenu cette équation en carrant les membres de l'équation $x^3=q'''-y^3$, en cubant les membres de l'équation $x^2=q''-yy$; et en égalant entr'eux les deux seconds membres.

Rem. En exprimant les deux quantités cherchées d'une manière symétrique par leur somme et par leur différence, on détermine la somme par une équation du troisième degré seulement. On a, $2x(xx+3yy)=q'''$, $2(xx+yy)=q''$, ou $6x(xx+yy)=3q''x$; d'où l'on tire, $4x^3=3q''x-q'''$.

2°. Trouver deux nombres x et y en connoissant la somme de leurs cubes q''', et la somme de leurs quatrièmes puissances q^{IV}.

Cond. $\begin{cases} x^3+y^3=q'''; \; x^3=q'''-y^3 \\ x^4+y^4=q^{IV}; \; x^4=q^{IV}-y^4 \end{cases}$ $x=\dfrac{q^{IV}-y^4}{q'''-y^3}$;

$xx=\frac{(q'''-y^3)^2}{q^{IV}-y^4}$. $x=\frac{(q'''-y^3)^3}{(q^{IV}-y^4)^2}=\frac{q^{IV}-y^4}{q'''-y^3}$;

$(q'''-y^3)^4=(q^{IV}-y^4)^3$. Cette équation est du douzième degré; la somme des nombres cherchés est déterminée par une équation du sixième degré.

3°. Trouver trois nombres en connoissant la somme q' du premier et du second, la somme q'' des carrés du second et du troisième, et la somme q''' des cubes du troisième et du premier

On a les équations, $x+y=q'$; $yy+zz=q''$, $z^3+x^3=q'''$, $zz=q''-yy$; $z^3=q'''-x^3$; $z=\frac{q'''-x^3}{q''-yy}=\frac{(q''-yy)^2}{q'''-x^3}$; de là, $(q''-yy)^3=(q'''-x^3)^2$.

De l'équation du premier degré $x+y=q'$, soit tirée $y=q'-x$; et soit substituée cette valeur de y, on a $(q''-(q'-x)^2)^3=(q'''-x^3)^2$; équation à une seule inconnue.

4°. Réduire à une seule équation à une seule inconnue les trois équations $xx-axy+yy=l$; $xx-bxz+zz=m$; $yy-cyz+zz=n$; a, b, c, l, m, n, étant des quantités connues.

Soustrayant l'un de l'autre les membres des deux premières équations; on obtient,

$$x(ay-bz)-(yy-zz)=m-l\,;\; x=\frac{m-l+(yy-zz)}{ay-bz}.$$

Des deux premières équations soient tirées les équations $x(x-ay)=l-yy$, $x(x-bz)=m-zz$;

de là, $\frac{x-ay}{x-bz}=\frac{l-yy}{m-zz}$;

$$x(m-zz)-x(l-yy)=ay(m-zz)-bz(l-yy),$$

$x=\frac{may-lbz-yz(az-by)}{m-l+(yy-zz)}$. De là,

$$(m-l+yy-zz)^2=(ay-bz)(may-lbz-yz(az-by)).$$

Partant, on a deux équations entre les deux inconnues y et z seulement; et l'inconnue x est éliminée.

§ 275. La composition des équations développée dans les §§ 257-259, est le fondement de la recherche de leurs racines entières; en effet, le dernier terme étant le produit des racines, si quelqu'une d'elles est entière, elle doit se trouver parmi les diviseurs du dernier terme.

1er. *Exemp.* Trouver trois nombres dont la somme est 10, dont la somme des produits deux à deux est 31, et dont le produit continuel est 30.

On a l'équation $X=x^3-10x^2+31x-30=0$.

Cette équation ne peut avoir aucune racine réelle négative. Diviseurs de 30, $\frac{1}{30}, \frac{2}{15}, \frac{3}{10}, \frac{5}{6}$.

Soit $x=1$; $X=1-10+31-30=-8$
$x=2$; $X=8-40+62-30=\ 0$.

Donc, 2 est une des valeurs de x.

Soit divisé le premier membre de X par $x-2$; on a pour quotient $xx-8x+15=(x-3)(x-5)$. Donc, les trois valeurs de x sont 2, 3, 5; en effet, $2+3+5=10$; $2.3+2.5+3.5=31$; $2.3.5=30$.

2d. *Ex.* Trouver trois nombres dont la somme est 9, dont la somme des carrés est 83, et dont la somme des cubes est 441.

D'après les formules du § 272, cette question est réduite à la précédente, on trouve que la somme des trois nombres est 9; la somme de leurs produits deux à deux est -1; et leur produit continuel est -105, on a donc l'équation $x^3-9x^2-x+105=0$. Dans cette équation, si toutes les racines sont réelles, il y en a deux positives et une négative § 262.

Diviseurs de 105... $\frac{1}{105}, \frac{3}{35}, \frac{5}{21}, \frac{7}{15}$.

Faisant $x=-3$, on a $X=0$; divisant par $x+3$, on a le quotient $xx-12x+35=(x-5)(x-7)$. Donc, les trois nombres cherchés sont,

-3, +5, +7; et les sommes énoncées dans la première et dans la troisième condition doivent être converties en différences.

3me. *Ex.* Trouver deux nombres dont la différence est 12; tels, que le produit du carré du petit par le grand soit 135.

Soit le petit nombre x, le grand sera $12+x$; produit $xx(x+12)$.

Cond. $x^3+12x^2=135$; ou $x^3+12x^2 * -135=0$.

Diviseurs de 135.... $\frac{1}{135}$, $\frac{3}{45}$, $\frac{5}{27}$, $\frac{9}{15}$.

Puisque le produit de grandeur donnée est $xx(x+12)$, parmi les quatre paires de facteurs du produit donné 135, on doit chercher celle qui est composée de manière que l'un d'eux est un carré, et que l'autre en surpasse la racine de 12 unités; la quatrième paire 9 et 15, est la seule qui jouit de cette propriété; on a donc, $x=3$, $x+12=15$. Soit divisé $x^3+12x^2 * -135$ par $x-3$, on a pour quotient

$$x^2+15x+45=\left(x+\frac{15+3\sqrt{5}}{2}\right)\left(x+\frac{15-3\sqrt{5}}{2}\right).$$

Ces deux dernières valeurs sont négatives, et elles répondent à la question dans laquelle le nombre donné 12 est la somme et non la

différence des deux parties cherchées. En effet, qu'on propose la question, partager 12 en deux parties, telles, que le produit du carré de l'une par l'autre, soit 135; on a l'équation, $xx(12-x)=135$, ou $-x^3+12x^2-135=0$; qui est la même que $x^3-12x^2* +135=0$. L'équation $-x^3+12x^2-135=0$, diffère de l'équation $x^3+12x^2-135=0$, seulement par le signe de la puissance impaire x^3 de x; et partant, les valeurs de x dans ces deux équations ne diffèrent que par le signe.

Que le produit donné au lieu d'être 135 soit 648. Les diviseurs de 648 sont,

$$\frac{1}{648}, \frac{2}{324}, \frac{3}{216}, \frac{4}{162}, \frac{6}{108}, \frac{8}{81}, \frac{9}{72}, \frac{12}{54}, \frac{18}{36}, \frac{24}{27}.$$

La seule paire de ces facteurs dont l'un est un carré et dont l'autre surpasse de 12 la racine de ce carré est celle qui est composée des facteurs 18 et 36; à laquelle répond $x=6$. Divisant $x^3+12x^2* -648$ par $x-6$; on a pour quotient $xx+18x+108$ qui n'a aucun facteur réel; partant, la valeur $x=6$ est la seule qui résout la question; et elle la résout dans le sens propre de l'énoncé. Les autres valeurs de x, étant imaginaires, savoir $-9\pm3\sqrt{-3}$; apprennent qu'il est impossible de partager 12 en deux parties, telles,

que le produit du carré de l'une par l'autre soit 648.

4me. *Ex.* Trouver deux nombres dont la différence est 6, et dont la somme des cubes est 1456.

Dén. Somme cherchée des deux nombres, $2x$.
Nombres cherchés, $x+3$, $x-3$.
Somme des cubes, $2x(xx+27)$.

Cond. $2x(xx+27)=1456$.
Réd. $x^3 * +27x-728=0$.

Diviseurs de 728; $\frac{1}{728}, \frac{2}{364}, \frac{4}{182}, \frac{7}{104}, \frac{8}{91}, \frac{13}{56}, \frac{14}{52}, \frac{26}{28}$.

Si le problème est résoluble en nombres rationnels, on doit prendre parmi les diviseurs plus grands que 27, ceux qui surpassent 27 d'un nombre carré; et la racine de ce carré doit être le facteur qui appartient à la même paire. Cette remarque particulière conduit immédiatement à la paire de facteurs 8 et 91 : soit divisé $x^3 * +27x-728$ par $x-8$, le quotient $xx+8x+91$ n'admet aucun facteur réel. Nombres cherchés 11 et 5.

5me. *Ex.* Trouver deux nombres dont la somme est 12, et dont la différence des cubes est 218.

Dén. Différence cherchée des deux nombres, $2x$.

Nombres cherchés, $6+x$, $6-x$.

Différence de leurs cubes, $2x(108+xx)$.

Cond. $2x(108+xx)=218$.

Réd. $x(108+xx)=109$; ou $x^3+108x-109=0$.

Le nombre 109 est premier, et la seule valeur de x est 1. Nombres cherchés 7 et 5.

6me. *Ex.* Trouver quatre nombres en progression géométrique en connoissant la somme des extrêmes 84, et la différence des moyens 18.

Dén. Somme cherchée des moyens $2x$.

Termes moyens, $x+9$, $x-9$.

Termes extrêmes, $\frac{(x+9)^2}{x-9}$, $\frac{(x-9)^2}{x+9}$.

Somme des extrêmes,

$$\frac{(x+9)^3+(x-9)^3}{xx-81}=\frac{2x(xx+243)}{xx-81}=84.$$

Réd. $x^3+243x=42xx-3402$;
$x^3-42xx+243x+3402=0$.

Dans cette équation, tous les termes qui suivent le premier se présentent comme divisibles par 3; soit $x=3z$; on aura en divisant par 27, $z^3-14z^2+27z+126=0$.

Diviseurs de 126, $\frac{1}{126}$, $\frac{2}{63}$, $\frac{3}{42}$, $\frac{6}{21}$, $\frac{7}{18}$, $\frac{9}{14}$.

Une valeur de z est 6; divisant par $z-6$ le premier membre de l'équation, on a pour quotient $zz-8z-21=(z-4+\sqrt{37})(z-4-\sqrt{37})$; partant, la question est susceptible de trois solutions, dans l'une desquelles 18 est la somme des moyens, et 84 est la différence des extrêmes, en changeant les signes de l'un des moyens et de l'un des extrêmes. Ces deux questions sont en effet liées l'une avec l'autre d'une manière intime. Si on cherche la solution de la seconde question, on a l'équatien

$$\frac{x(xx+243)}{81-xx}=42 \text{ ; ou } x^3+42xx+243x-3402=0.$$

Soit changé le signe de x, on a,

$$-x^3+42xx-243x-3402=0,$$

ou $x^3-42xx+243x+3402=0$.

7me. *Ex.* Partager 36 en six parties, telles; que, si on ajoute à la première deux unités, si on ôte à la seconde deux unités; si on multiplie la troisième par 2, et si on divise la quatrième par 2; si on élève la cinquième au carré ou à la puissance dont l'exposant est 2, et si on extrait de la sixième la racine carrée, ou celle dont l'indice est 2; les six résultats qu'on obtient soient égaux entr'eux.

Dén. Résultat commun . . . xx.

1re. 2de. 3me. 4me. 5me. 6me. parties

$xx-2$, $xx+2$, $\frac{xx}{2}$, $2xx$, x, x^4.

Somme des six parties, $x^4+\frac{9}{2}xx+x$.

Cond. $x^4+\frac{9}{2}xx+x=36$, ou, $2x^4 * +9x^2+2x-72=0$.

Dans cette équation, tous les termes excepté $9x^2$ se présentent comme étant divisibles par 2; donc, si la question est résoluble en nombres entiers, on doit avoir $x=2z$; de là, $8z^4 * +9zz+z-18=0$. Une valeur de z est 1; divisant par $z-1$; on a, $8z^3+8zz+17z+18=0$; dans cette équation les valeurs de z sont négatives; elle revient à l'équation $-8z^3+8zz-17z+18=0$; ou, $8z^3-8zz+17z-18=0$, qui n'a aucune racine rationnelle. On a donc en nombres rationnels, résultat commun, 4; et les six parties sont respectivement 2, 6, 2, 8, 2, 16.

Aut. exemple. Somme à partager, 332.

8me. *Ex.* Trouver un nombre composé de trois caractères, tels, que le caractère des dizaines est moyen arithmétique entre le caractère des centaines et celui des unités; le produit continuel de ces trois caractères

est 162 ; si à ce nombre on ôte 594 on obtient un nombre composé des mêmes caractères placés dans un ordre renversé.

Dén. Somme des extrêmes, $2s$; terme moyen, s ; différence des extrêmes, $2d$; termes extrêmes, $s+d$, $s-d$; nombre cherché, $100(s+d)+10s+(s-d)$; nombre composé des mêmes caractères renversés, $s+d+10s+100(s-d)$; excès du premier nombre sur le second, $99(s+d)-99(s-d)=198d$, partant, $d=3$. Caractères du nombre cherché, $s+3$, s, $s-3$. Produit continuel de ces trois caractères, $s(ss-9)$.

Cond. $s(ss-9)=162$; ou $s^3 * -9s-162=0$. Comme les deux derniers termes sont divisibles par 9, le premier terme doit aussi être divisible par 9 ; donc, s est un multiple de 3 ; soit $s=3s'$; on a, $s'(s's'-1)=6$. Diviseurs de 6, $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{3}$; donc, $s'=2$, $s=6$. Termes extrêmes, 9 et 3 ; terme moyen, 6 ; nombre cherché 963.

§ 276. Lorsque le dernier terme du premier membre d'une équation a un grand nombre de diviseurs ; on peut diminuer les essais à faire sur chacun d'eux. Je vais exposer dans les deux §§ suivans deux des moyens qu'on emploie pour cela.

Soit $X = x^{n} + p'x^{n-1} + p''x^{n-2} + \ldots\ldots p^{N-II}x^2 + p^{N-I}x + p^{N}$ le premier membre d'une équation dont tous les coefficiens sont entiers; et soit $x+a$ un binome duquel on demande s'il est diviseur de X. Soit le quotient,

$$x^{n-1}+q'x^{n-2}+q''x^{n-3}+\ldots q^{N-III}x^2+q^{N-II}x+q^{N-1}.$$

Soit pris le produit du diviseur par le quotient; et soient égalés les termes du produit aux termes correspondans de X; on doit avoir toutes les équations,

$$q^{N-I}a \quad = p^{N}\text{; de là } q^{N-I} = \frac{p^{N}}{a}$$

$$q^{N-II}a + q^{N-I} = p^{N-I}\ldots\; q^{N-II} = \frac{p^{N-I}-q^{N-I}}{a}$$

$$q^{N-III}a + q^{N-II} = p^{N-II}\ldots\; q^{N-III} = \frac{p^{N-II}-q^{N-II}}{a}$$

$$\vdots$$

$$q'''a + q^{IV} = p^{IV}\ldots\; q''' = \frac{p^{IV}-q^{IV}}{a}$$

$$q''a + q''' = p'''\ldots\; q'' = \frac{p'''-q'''}{a}$$

$$q'a + q'' = p''\ldots\; q' = \frac{p''-q''}{a} = p'-a.$$

$$a + q' = p'.$$

Partant,

Partant, toutes les quantités successives, $p^{\text{N}}, p^{\text{N-I}}-q^{\text{N-I}}, p^{\text{N-II}}-q^{\text{N-II}} .. p^{\text{IV}}-q^{\text{IV}}, p'''-q''', p''-q''$, doivent être divisibles par a; l'on doit outre cela avoir l'équation $\frac{p''-q''}{a}=p'-a$; ou, $q''=p''-ap'+aa$.

Si le binome diviseur est $x-a$, on obtient les mêmes équations en présentant X sous la forme,

$x^n-p'x^{n-1}+p''x^{n-2}\ldots\pm p^{\text{N-II}}x^2\mp p^{\text{N-I}}x\pm p^{\text{N}}$,

et le quotient sous la forme,

$$x^{n-1}-q'x^{n-2}\ldots\mp q^{\text{N-III}}x^2\pm q^{\text{N-II}}x\mp q^{\text{N-I}}.$$

Ex. On demande si la quantité, $x^5-11x^4+38x^3-46x^2+38x-40$, est divisible par $x-5$. On a, $\frac{40}{5}=8$; $38-8=30$, $\frac{30}{5}=6$; $46\text{-}6=40$, $\frac{40}{5}=8$; $38\text{-}8=30$, $\frac{30}{5}=6$; $11\text{-}6=5$, $\frac{5}{5}=1$.

Donc, $\text{X}=(x-5)(x^4-6x^3+8x^2-6x+8)$.

On demande si la même quantité X est divisible par $x\text{-}2$. On a, $\frac{40}{2}=20$; $38\text{-}20=18$; $\frac{18}{2}=9$; $46-9=37$; qui n'est pas divisible par 2; donc, X n'est pas divisible par $x-2$.

Ce procédé s'applique aisément au cas où le premier terme de la fonction proposée a un coefficient entier p.

Soit $\text{X}=px^n+p'x^{n-1}+p''x^{n-2}\ldots+p^{\text{N-I}}x+p^{\text{N}}=(mx+a)(qx^{n-1}+q'x^{n-2}+q''x^{n-3}\ldots+q^{\text{N-II}}x+q^{\text{N-I}})$,

On a de même,

$$q^{N-1}a = p^N \qquad q^{N-1} = \frac{p^N}{a}$$

$$q^{N-II}a + mq^{N-I} = p^{N-1} \qquad q^{N-II} = \frac{p^{N-1} - mq^{N-1}}{a}$$

$$q^{N-III}a + mq^{N-II} = p^{N-II} \qquad q^{N-III} = \frac{p^{N-II} - mq^{N-II}}{a}$$

.

.

.

$$q''a + mq''' = p''' \qquad q'' = \frac{p''' - mq'''}{a}$$

$$q'a + mq'' = p'' \qquad q' = \frac{p'' - mq''}{a}$$

$$qa + mq' = p' \qquad q = \frac{p' - mq'}{a} = \frac{p}{m}.$$

Ex. On demande si la quantité $6x^4 + 19x^3 + 3x^2 - 8x + 15$, est divisible par $2x + 3$; on a, $\frac{15}{3} = 5$; $\frac{-8-10}{3} = -6$; $\frac{3+12}{3} = 5$; $\frac{19-10}{3} = 3 = \frac{6}{2}$. Donc, la quantité proposée X, est divisible par $2x + 3$; et on a, $X = (2x+3)(3x^3 + 5x^2 - 6x + 5)$.

§ 277. Soit $X = x^n - p'x^{n-1} \ldots \pm p^{N-I}x \pm p^N = 0$; une équation dans laquelle une des valeurs rationnelles et entières de l'inconnue est un des diviseurs du dernier terme. Soit fait $x = y + 1$; on obtient une équation Y, dont

le dernier terme provient de l'équation X, en y substituant $+1$ à x; et les valeurs rationnelles et entières de y, qui sont moindres d'une unité que les valeurs de x, sont des diviseurs de ce dernier terme. De même, soit fait $x=z-1$; on obtient une équation Z, dont le dernier terme provient de l'équation X en y substituant -1 à x; et les valeurs entières et rationnelles de z, qui surpassent d'une unité les valeurs de x, sont des diviseurs du dernier terme. Partant, pour qu'un des diviseurs du dernier terme de X satisfasse à cette équation, il doit être moyen arithmétique entre deux des diviseurs des quantités provenues des substitutions de $+1$ et de -1 à x dans cette équation; ensorte que sa différence à ces diviseurs soit l'unité. La valeur de x est positive ou négative suivant que la proportion est croissante ou décroissante.

Ex. 1er. Trouver deux nombres dont la différence est 13; tels, que le produit du carré du petit par le grand est 144.

Soit x le petit nombre, le grand sera $13+x$, le produit est $xx(13+x)$. On a, $x^3+13xx * -144=0$. Soit $x=y+1$; le dernier terme est -130; soit $x=z-1$; le dernier terme est -132.

Diviseurs de 130... $\frac{1}{130}, \frac{2}{65}, \frac{5}{26}, \frac{10}{13}$.

Diviseurs de 144... $\frac{1}{144}, \frac{2}{72}, \frac{3}{48}, \frac{4}{36}, \frac{6}{24}, \frac{8}{18}, \frac{9}{16}, \frac{12}{12}$.

Diviseurs de 132... $\frac{1}{132}, \frac{2}{66}, \frac{3}{44}, \frac{4}{33}, \frac{6}{22}, \frac{11}{12}$.

Ces suites de diviseurs donnent lieu aux deux proportions arithmétiques croissantes, 1, 2, 3; 2, 3, 4; et aux deux proportions arithmétiques décroissantes, 5, 4, 3; 13, 12, 11. La valeur 2 tirée de la premiere ne satisfait pas à l'équation. La valeur 3 tirée de la seconde, et les deux valeurs —4 et —12 tirées des deux dernières y satisfont. On a donc, $x^3+13xx* -144=(x-3)(x+4)(x+12)$, ou les trois valeurs entières et rationnelles de x, sont $+2$, -4, -12. Les deux dernières valeurs répondent à la question dans laquelle 13 est la somme et non la différence des facteurs cherchés.

2[d]. *Ex.* Trouver deux nombres dont on connoît la somme des carrés 74, et la somme des cubes 468.

Dén. Somme des nombres cherchés $2x$; différence, $2y$; nombres cherchés, $x+y$, $x-y$.

$$Cond. \begin{cases} 2(xx+yy)=74 \\ 2x(xx+3yy=468 \end{cases} \text{ ou } \begin{matrix} xx+yy=37 \\ x(xx+3yy)=234 \end{matrix}.$$

Dans la seconde équation, soit substituée

à yy sa valeur $37-xx$ tirée de la première, on obtient $2x^3 * -111x+234=0$. Comme les deux derniers termes sont divisibles par 3, si la valeur de x est entière elle est divisible par 3, soit $x=3v$; ou $6v^3-37v+26=0$. Soit $v=y+1$: le dernier terme, est -5; soit $v=z-1$; le desrnier est 57.

Diviseurs de 5, $\frac{1}{5}$, diviseurs de 26, $\frac{1}{26}$, $\frac{2}{13}$; diviseurs de 57, $\frac{1}{57}$, $\frac{3}{19}$. Ces diviseurs donnent la seule proportion 1, 2, 3; donc, la seule valeur de v à tenter est 2; cette valeur réussit, et la valeur correspondante de x est 6; valeur de yy, 1; les nombres cherchés sont 7 et 5.

Dans le dernier exemple, le diviseur x-6 du premier membre de l'équation, est indépendant du coefficient 2 du premier terme. Comme une équation dans laquelle le coefficient du premier terme n'est pas l'unité, peut-être ramenée à une autre dont le premier terme a pour coefficient l'unité (§ 268); le procédé qui vient d'être développé est applicable à l'un et à l'autre cas. Mais on peut aussi rechercher les diviseurs commensurables, s'il y a lieu, sans ramener le premier terme à avoir l'unité pour coefficient; et il convient d'autant mieux d'appliquer le procédé à ce cas, que la réduction à l'unité

du coefficient du premier terme introduit souvent un dernier terme, dont le nombre des diviseurs est beaucoup plus grand que le nombre de ceux du dernier terme de la première équation.

Soit m un des facteurs du coefficient du premier terme de l'équation X; soit $mx—a$, un des facteurs du premier membre de cette équation; et soit $X=X'(mx—a)$. Soit fait $x=y+1$; on aura $Y=Y'(my+m—a)$; soit $x=z—1$; on aura, $Z=Z'(mz—m—a)$. Partant, les derniers termes des équations Y, X, Z, ont pour diviseurs, $a\text{-}m$, a, $a+m$; qui forment une proportion arithmétique dont la différence commune des termes est m, l'un des diviseurs du coefficient du premier terme.

1er. *Ex.* Soit $X=10x^3\text{-}31x^2+40x\text{-}24=0$. Diviseurs de 10, $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{5}$. Les nombres provenus des substitutions de $+1$, 0, $—1$, à x, sont respectivement $—5$, $—24$, $—105$. Diviseurs de 5; $\frac{1}{5}$. Diviseurs de 24; $\frac{1}{24}$, $\frac{2}{12}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{4}{6}$. Diviseurs de 105; $\frac{1}{105}$, $\frac{3}{35}$, $\frac{5}{21}$, $\frac{7}{15}$. Ces derniers diviseurs donnent lieu aux trois proportions; 1, 2, 3; 1, 3, 5; 5, 4, 3; 5, 6, 7; auxquelles répondroient les binomes $x\text{-}2$, $2x\text{-}3$, $x+4$, $x—6$. Le second de ces binomes, $2x—3$, est

le seul qui soit diviseur du premier membre de l'équation proposée ; et on a,

$10x^3-31x^2+40x-24=(2x-3)(5x^2-8x+8)$.

2^d. *Ex.* Soit $X=24x^3-38x^2-67x+105=0$.

Diviseurs de 24; $\frac{1}{24}, \frac{2}{12}, \frac{3}{8}, \frac{4}{6}$. Nombres provenus de la substitution à x de $+1, 0, -1$; $+24, +105, +110$.

Diviseurs de 105; $\frac{1}{105}, \frac{3}{35}, \frac{5}{21}, \frac{7}{15}$. Diviseurs de 110; $\frac{1}{110}, \frac{2}{55}, \frac{5}{22}, \frac{10}{11}$. Proportions arithmétiques, 1, 3, 5; 3, 7, 11; 4, 3, 2; 4, 7, 10; 8, 5, 2. A ces proportions répondent les binomes, $2x-3$, $4x-7$, $x+3$, $3x-7$, $3x+5$. Ceux de ces binomes qui satisfont à l'équation sont, $2x-3$, $3x+5$, $4x-7$. On a,

$24x^3-38x^2-67x+105=(2x-3)(3x+5)(4x-7)$.

Rem. Lorsque les substitutions de $y+1$, et de $z-1$, à x, donnent lieu à plusieurs proportions arithmétiques, on peut prolonger ces substitutions, en faisant $x=y'+2$, $x=z'-2$; et retenir seulement celles de ces proportions qui se prolongent par ces substitutions.

§ 278. Lorsqu'on a épuisé inutilement la recherche des diviseurs binomes rationnels du premier membre d'une équation, il est naturel de rechercher ses diviseurs trinomes rationnels. Ces diviseurs peuvent provenir de diviseurs binomes qui diffèrent seulement par

les signes des quantités radicales ou imaginaires qu'ils contiennent; et le dernier terme de chacun de ces binomes est un des diviseurs du dernier terme du premier membre de l'équation proposée.

Soit, par exemple, une équation du quatrième degré dont le dernier terme soit décomposé dans ses diviseurs : on pourra essayer ces diviseurs, qui, deux à deux, donnent ce dernier terme, pour être les derniers termes de deux trinomes dont on cherchera les coefficiens des deux seconds termes.

Soient m et m' deux diviseurs du dernier terme dont le produit est égal à ce terme : soient $xx+nx+m$; et $xx+n'x+m'$, les deux facteurs trinomes dont le produit est égal au premier membre X de l'équation, $x^4+p'x^3+p''x^2+p'''x+mm'=0$. Soient égalés, deux à deux, les coefficiens des termes du produit de ces deux trinomes aux coefficiens des termes correspondans de X : on a les trois équations; $n+n'=p'$; $m+m'+nn'=p''$; $m'n+mn'=p'''$. De la première et de la troisième de ces équations, on tire : $n=\frac{mp'-p'''}{m-m'}$, $n'=\frac{p'''-m'p'}{m-m'}$; pour que ces valeurs satisfas-

sent à la seconde équation, on doit avoir

$$\frac{mp'-p'''}{m-m'} \times \frac{p'''-m'p'}{m-m'} + m + m' = p''.$$

1er. *Exemple.* Soit l'équation,

$X = x^4 - 14x^3 + 60x^2 - 86x + 35 = 0.$

On a, $p' = -14$, $p'' = 60$; $p''' = -86$.

Les diviseurs de 35 sont $\frac{1}{35}$, $\frac{5}{7}$; comme le signe du dernier terme est +, ces diviseurs doivent être pris deux à deux l'un et l'autre positifs, ou l'un et l'autre négatifs.

Soit $m = +35$, $m' = +1$; on trouve que ces valeurs ne satisfont pas; il en est de même pour $m = -35$, $m' = -1$.

Soit $m = 7$, $m' = 5$; $\frac{mp'-p'''}{m-m'} = \frac{86-98}{2} = -6$;

$\frac{p'''-m'p'}{m-m'} = \frac{70-86}{2} = -8$. $\frac{mp'-p'''}{m-m'} \times \frac{p'''-m'p'}{m-m'} = 48$.

$m + m' = 12$, $48 + 12 = 60$. Donc, les diviseurs 7 et 5 satisfont; et on a,

$X = (xx - 6x + 7)(xx - 8x + 5) = 0.$

2d. *Ex.* Soit $X = x^4 - 12x^3 + 40x^2 - 19x - 24 = 0$.

Diviseurs de 24; $\frac{1}{24}$, $\frac{2}{12}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{4}{6}$. Comme le signe du dernier terme est −1; les deux derniers termes des deux trinomes doivent avoir des signes contraires. On trouve que les deux paires de diviseurs, 1 et 24, 2 et 12, ne satisfont pas.

Ou trouve aussi que les diviseurs $+3$ et -8 ne satisfont pas. Mais, si on fait $m=+8$, $m'=-3$; on a, $\frac{mp'-p'''}{m-m'}=\frac{19-96}{11}=-7$; $\frac{p'''-m'p'}{m-m'}=\frac{-19-36}{11}=-5$; $m+m'=+5$; $7\times5+5=40$; on a donc,
$\mathrm{X}=(xx-7x+8)(xx-5x-3)$.

Ce procédé est applicable à la recherche des diviseurs trinomes rationnels d'une équation quelconque; mais, il est d'autant plus long que le nombre des diviseurs du dernier terme est plus considérable, et que l'équation proposée est d'un degré plus élevé.

§ 279. On a aussi appliqué à la recherche des facteurs trinomes rationnels, le procédé exposé dans le § 277, relatif aux binomes rationnels, en y faisant les modifications convenables.

Soit X une équation dans laquelle le coefficient du premier terme est l'unité, et soit $xx-q'x+q''$ un diviseur trinome du premier membre de cette équation, de manière qu'on ait $\mathrm{X}=\mathrm{X}'(xx+q'x+q'')$. Soit fait $x=y+1$, $x=z-1$, on aura, $\mathrm{Y}=\mathrm{Y}'(yy+(q'+2)y+q''+q'+1)$, $\mathrm{Z}=\mathrm{Z}'(zz+(q'-2)z+q''-q'+1)$. Partant, les

derniers termes des équations Y, X, Z, sont respectivement divisibles par $q''+q'+1$, q'', $q''-q'+1$. Si au premier et au dernier de ces trois diviseurs on ôte l'unité : on obtient la proportion arithmétique $q''+q'$, q'', $q''-q'$; dont la différence consécutive des termes est q'.

Soit fait de nouveau $x=t+2$, $x=v-2$; on aura de même,

$$\text{T}=\text{T}'(tt+(q'+4)t+q''+2q'+4)$$
$$\text{V}=\text{V}'(vv+(q'-4)v+q''-2q'+4).$$

Partant, si aux diviseurs des derniers termes de T et de V, on ôte 4, les restes sont le premier et le cinquième terme d'une progression arithmétique dont les trois premiers sont les moyens : de là, découle le procédé suivant.

Dans l'équation proposée soit substitué à x, $+2$, $+1$, 0, -1, -2; soient pris soit en plus soit en moins les diviseurs des nombres provenus de ces substitutions. Aux diviseurs des résultats des substitutions de $+2$ et de -2 à x, soit ôté 4 (carré de 2), et aux diviseurs des nombres provenus des substitutions de $+1$ et de -1, soit ôté 1; soient cherchées les proportions arithmétiques auxquelles donnent lieu ces restes, et dont

quelque diviseur du dernier terme de l'équation proposée est le terme moyen. Ceux des diviseurs de ce dernier terme qui appartiennent à ces progressions, sont les seuls à essayer comme troisièmes termes des diviseurs trinomes de l'équation proposée ; et les coefficiens des seconds termes de ces binomes sont les différences des progressions correspondantes.

Pour peu que le dernier terme de l'équation proposée, et les derniers termes des équations provenues des substitutions successives, aient des diviseurs nombreux; on trouve plusieurs progressions arithmétiques, et pour les exclure, il faut pousser les substitutions jusqu'à des différences plus grandes que 2.

Exemple. On demande les diviseurs trinomes rationnels de l'équation,

$x^4-10x^3+25x^2+2x-12=0.$

§ 280. Il arrive quelquefois que des circonstances particulières aux questions dont on s'occupe facilitent la solution de l'équation à laquelle elles conduisent, et fournissent les moyens de la ramener à une équation simple. Je vais en proposer un ou deux exemples.

On demande la racine pyramidale d'un nombre pyramidal proposé, s. Pour peu que le nombre proposé soit grand, la racine pyramidale

cherchée augmentée d'une unité approche beaucoup d'être la racine du cube immédiatement plus grand que le sextuple du nombre proposé (1).

En effet, soit $n-1$ la racine pyramidale cherchée. Le nombre pyramidal correspondant est $\frac{n-1}{1}.\frac{n}{2}.\frac{n+1}{3}$; on doit avoir $(n-1)n(n+1)=6s$. Or, le rapport de $(n-1)n(n+1)$ à n^3 est celui de $(n-1)(n+1)$ à n^2; et ce rapport approche promptement du rapport d'égalité pour peu que n soit grande, de manière cependant que $n^3>(n-1)n(n+1)$; partant, si la question est résoluble dans le sens propre de l'énoncé suivant lequel n est un nombre entier, n est égale à la racine cubique du cube immédiatement plus grand que $6s$.

1er. *Ex.* Quelle est la place du nombre 220 parmi les nombres pyramidaux? $6\times220=1320$; $11^3=1331$; donc on doit avoir $n=11$; et partant, si le nombre proposé est pyramidal, il est le 10me. En effet, $\frac{10.11.12}{1.2.3}=220$.

---

(1) J'appelle *racine pyramidale* d'un nombre pyramidal proposé, le nombre qui indique la place qu'il occupe dans la suite des nombres pyramidaux.

2^d. *Ex.* Quelle est la place du nombre 1540 parmi les nombres pyramidaux? $6 \times 1540 = 9240$; $21^3 = 9261$; $n = 21$; le nombre proposé est le 20me nombre pyramidal.

Aut. ex. Une lotterie conforme au lotto gênois donnent lieu à 117 480 ternes : on demande le nombre des numéros dont cette lotterie est composée : on demande à combien de ces numéros on doit s'intéresser pour qu'ils donnent lieu à 9 880 ternes; *item* combien doit-on prendre de numéros, pour que le nombre des ternes auxquels ils donnent lieu approche autant que possible de la dixième partie des ternes de la lotterie qui est 11748?

3me. *Ex.* Combien faut-il prendre de nombres carrés successifs à commencer depuis l'unité pour faire une somme proposée s?

Soit n-1 le nombre cherché : on doit avoir $\frac{(n-1)n(2n-1)}{1.\ 2.\ 3.} = s$; et $(n-1)n(2n-1) = 6s$. Or, le produit $(n-1)n(2n-1)$, plus petit que le double du cube du facteur moyen n, en approche d'autant plus que n est plus grande : on a donc, $n^3 > 3s$; et si le ploblème peut être résolu dans le sens propre de l'énoncé sui-

vant lequel n est un nombre entier, n est la racine du cube immédiatement supérieur à $3s$.

Soit $s=91$; $3s=273$; $6^3=216$, $7^3=343$; donc, $n=7$, et le nombre cherché est 6; en effet, $\frac{6.7.13}{1.2.3}=91$.

Soit $s=385$; $3s=1155$, $10^3=1000$, $11^3=1331$; $n=11$; le nombre cherché est 10; en effet, $\frac{10.11.21}{1.2.3}=385$.

3me. *Ex.* Quelle la place d'un nombre proposé s parmi les nombres figurés du quatrième ordre?

Soit n le nombre qui indique la place du nombre proposé : on a, $\frac{n.n+1.n+2.n+3}{1.\ 2.\ 3.\ 4.}=s$;

$n(n+1)(n+2)(n+3)=24s$.

$(n+1)^4 < 24s$; $(n+2)^4 > 24s$. Soit $s=1385$; $24s=33240$; $13^4=28561$; $14^4=38416$; donc, la valeur entière la plus approchée de $n+1$ est 13; et la valeur de n est 12; en effet, $12.\ 13.\ 14.\ 15=24.\ 1385$.

CHAPITRE XXI.

Solution générale des Equations du troisième degré.

§ 281. Les plus simples des équations du troisième degré sont celles qui sont composées seulement du cube de l'inconnue égal à une quantité connue, ou qui sont de la forme $x^3=a^3$. La solution de ces équations simples exige seulement l'extraction de la racine cubique de la quantité connue : on a, $x=\sqrt[3]{a^3}=a$. Cette opération a été développée dans le § 170, je la supposerai suffisamment connue. De l'équation $x^3=a^3$, on tire $x^3-a^3=0$; or, $x^3-a^3=(x-a)(xx+ax+aa)$; donc, on satisfait à l'équation $x^3=a^3$ en égalant à zéro chacun des facteurs $x-a$, $xx+ax+aa$. La première valeur $x=a$, tirée de l'équation $x-a=0$, est le plus souvent la seule dont on est appelé à s'occuper; l'autre équation $xx+ax+aa=0$, donne $x=a.\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$. Quoique ces deux

dernières

dernières valeurs soient purement symboliques et le plus souvent négligibles; il y a des cas dans lesquels il convient d'y avoir égard. On trouve en effet, que les cubes de chacune des deux quantités $\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$ sont égaux à l'unité. Leur produit est aussi l'unité. Je vais proposer quelques questions simples, qui dépendent seulement de ce genre d'équations du troisième degré.

Trouver deux nombres dont on connoît le rapport, et la somme ou la différence de leurs cubes.

Trouver deux nombres dont on connoît le rapport, et le produit du carré de l'un par l'autre.

Trouver trois nombres dont on connoît les rapports et le produit continuel; ou trouver un parallelipipède rectangle dont on connoît les rapports des arrêtes et la capacité.

Entre deux nombres donnés a et b trouver deux moyens continuellement proportionnels.

Une personne qui possède un certain capital s, le fait valoir pendant trois ans à intérêts composés. On demande le taux de l'intérêt, en sachant qu'à la fin de ce tems elle possède un capital connu s'.

On demande deux nombres en connoissant chacun des produits du carré de l'un par l'autre.

Trouver trois nombres, en connoissant le produit p du carré du premier par le second, le produit p' du carré du second par le troisième, et le produit p'' du carré du troisième par le premier.

Trouver quatre nombres en connoissant leurs produits trois à trois.

Comme ces équations simples ne présentent aucune difficulté : je passe à la solution des équations composées du troisième degré. Je vais montrer comment la solution de ces équations peut être ramenée à la solution des équations du second degré, combinée avec celle des équations simples du troisième degré.

§ 282. *Prob.* Trouver deux nombres dont on connoît le produit p, et la différence des cubes $2q$.

Soient les nombres cherchés x et y ; on a les deux équations $\begin{array}{r} x^3-y^3=2q \\ xy\quad=p \end{array}$. Soient pris les carrés des membres de la première équation ; soient pris les quadruples des cubes des membres de la seconde ; et soient prises les sommes des membres correspondans de ces deux équations

ainsi changés : on obtient $(x^3+y^3)^2=4qq+4p^3$; $x^3+y^3=2\sqrt{qq+p^3}$). De là,
$x^3=\sqrt{(qq+p^3)}+q$; $y^3=\sqrt{(qq+p^3)}-q$.

$$x=\sqrt[3]{\sqrt{(qq+p^3)}+q}, \quad y=\sqrt[3]{\sqrt{(qq+p^3)}-q}.$$

Ex. Soit $p=45$; $q=302$; $qq=91\,204$; $p^3=91\,125$; $qq+p^3=182\,329$; $\sqrt{(qq+p^3)}=427$; $427+302=729$; $427-302=125$; $x=9$, $y=5$.

Rem. 1re. Les valeurs de x et de y sont toujours réelles (en supposant que p est positive).

Rem. 2de. Les autres valeurs de x et de y, provenues des combinaisons des premières valeurs avec les racines cubiques imaginaires de l'unité , sont imaginaires.

Rem. 3me. Relativement aux deux cubes x^3 et y^3 dont le produit est p^3, la question proposée est la même que celle du § 86 ; trouver deux nombres dont on connoît la différence et le produit.

Rem. 4me. Soient les nombres cherchés x et $\frac{p}{x}$; on a l'équation , $x^3-\frac{p^3}{x^3}=2q$; ou $x^6-2qx^3=p^3$; de laquelle on tire,

$$x^3=q+\sqrt{(qq+p^3)}; \quad \frac{p^3}{x^3}=\frac{p^3}{q+\sqrt{(qq+p^3)}}=\sqrt{(qq+p^3)}-q;$$

comme par le premier procédé.

§ 283. Trouver deux nombres dont on connoît le produit p, et la somme des cubes $2q$.

Soient les nombres cherchés x et y.

On a les deux équations, $\begin{matrix} x^3+y^3=2q \\ xy \;\; =p \end{matrix}$.

Soient pris les carrés des membres de la première équation, et les quadruples des cubes des membres de la seconde; puis, soient prises les différences des membres des équations qui en proviennent; on obtient, $(x^3-y^3)^2=4(qq-p^3)$; $x^3-y^3=2\sqrt{(qq-p^3)}$; mais, $x^3+y^3=2q$; donc, $x^3=q+\sqrt{(qq-p^3)}$, $y^3=q-\sqrt{(qq-p^3)}$: $x=\sqrt[3]{q+\sqrt{(qq-p^3)}}$,

$y=\sqrt[3]{q-\sqrt{(qq-p^3)}}$, $xy=\sqrt[3]{qq-(qq-p^3)}=p$.

Ex. Soit $2q=468$, $p=35$; $qq=54756$, $p^3=42875$; $qq-p^3=11881$; $\sqrt{(qq-p^3)}=109$; $234+109=343$; $234-109=125$; $x=7, y=5$.

Rem. 1er. Pour que le problème soit possible, on doit avoir $qq \geqq p^3$; et partant la plus grande valeur de p est $\sqrt[3]{qq}$.

Rem. 2de. Relativement aux deux cubes x^3 et y^3, dont le produit est p^3, la question est la même que celle du § 87; trouver deux nombres dont on connoît la somme et le produit.

Rem. 3me. Les deux autres valeurs des inconnues, qui proviennent des combinaisons des premières avec les racines cubiques imaginaires de l'unité, sont imaginaires; soit que les premières valeurs soient réelles, soit qu'elles soient imaginaires.

Rem. 4me. Soient les nombres cherchés x et $\frac{p}{x}$; on a l'équation $x^3+\frac{p^3}{x^3}=2q$; $x^6-2qx^3+p^3=0$; de là, $x^3=q+\sqrt{(qq-p^3)}$; $y^3=q-\sqrt{(qq-p^3)}$; ainsi que par le premier procédé.

Au lieu de chercher immédiatement chacune des quantités x et y dans les deux problèmes précédens; on peut être tenté d'employer le procédé que nous avons souvent suivi avec succès, et de les rechercher médiatement en les exprimant dans leur somme et dans leur différence.

§284. 1er. *Prob.* Soit p le produit donné de deux nombres, et soit $2q$ la différence de leurs cubes. Soit $2s$ la somme cherchée de ces nombres, et soit $2d$ leur différence. On a les deux équations $\begin{matrix} ss-dd=p \\ 2d(3ss+dd)=2q \end{matrix}$;

$ss=p+dd$; $3ss+dd=3p+4dd$;

$2d(3ss+dd)=2d(4dd+3p)=8d^3+6pd=2q$.
Ce procédé mène donc à une équation du troisième degré proprement dite ; en tant qu'elle contient le cube de l'inconnue $2d$, et son produit par la quantité connue $3p$. Nous n'avons jusqu'à présent aucun moyen général de résoudre cette équation. Mais, puisque dans le § 282, nous avons résolu la question qui vient de nous mener à cette équation, en cherchant immédiatement les deux quantités demandées; les formules que nous avons trouvées pour leur différence $2d$ doivent résoudre l'équation $8d^3+6pd=2q$. On a donc pour la valeur de $2d$.

$\sqrt[3]{\sqrt{(qq+p^3)}+q}-\sqrt[3]{\sqrt{(qq+p^3)}-q}$. J'affirme que cette valeur satisfait à l'équation, $8d^3+6pd=2q$. En effet, soit

$$2d=\sqrt[3]{\sqrt{(qq+p^3)}+q}-\sqrt[3]{\sqrt{(qq+p^3)}-q}.$$

$$8d^3=2q-3p\left\{\sqrt[3]{\sqrt{(qq+p^3)}+q}-\sqrt[3]{\sqrt{(qq+p^3)}-q}\right\}=2q-6pd;$$

ou $8d^3+6pd=2q$.

R. 1re. $4dd=\sqrt[3]{(\sqrt{(qq+p^3)}+q)^2}-2p+\sqrt[3]{(\sqrt{(qq+p^3)}-q)^2}$

$$4ss=4p+4dd=\sqrt[3]{(\sqrt{(qq+p^3)}+q)^2}+2p+\sqrt[3]{(\sqrt{(qq+p^3)}-q)^2}$$

$$2s=\sqrt[3]{\sqrt{(qq+p^3)}+q}+\sqrt[3]{\sqrt{(qq+p^3)}-q}.$$

Rem. 2de. On peut chercher s immédiatement d'après les deux premières équations, en éliminant d; on a, $dd = ss - p$; $d(dd + 3ss) = q$;

de là, $d(4ss - p) = q$; $d = \frac{q}{4ss - p}$; *item*,

$$d = ss - p : \frac{q}{4ss - p} = \frac{(ss-p)(4ss-p)}{q};$$

donc, $qq = (ss - p)(4ss - p)^2$;

ou $16s^6 - 24s^4p + 9sspp - p^3 = qq$. Cette équation du sixième degré est réductible au troisième, en regardant ss comme l'inconnue.

Rem. 3me. La solution de l'équation, $8d^3 - 6pd = 2q$, revient à regarder $2d$ comme étant la différence de deux quantités dont le produit est p et dont la différence des cubes est $2q$; et la solution de l'équation, $16s^6 - 24s^4p + 9sspp - p^3 = qq$, revient à regarder $2s$ comme étant la somme de ces quantités.

Rem. 4me. On auroit pu parvenir aux deux équations précédentes en employant une seule inconnue.

1°. Soit $2d$ la différence des deux quantités cherchées; leur demi-somme est $\sqrt{(dd + p)}$; et ces deux quantités sont $\sqrt{(dd + p)} + d$, $\sqrt{(dd + p)} - d$; la différence des deux cubes

est $2d(3(dd+p)+dd)=2d(4dd+3p)=2q$.

2°. Soit $2s$ la somme des deux quantités cherchées; leur demi-différence est $\sqrt{(ss-p)}$; les deux quantités sont $s+\sqrt{(ss-p)}$, $s-\sqrt{(ss-p)}$, la différence de leurs cubes est $2(4ss-p)\sqrt{(ss-p)}=2q$.

Rem. 5me. Les autres valeurs de $2d$ et de $2s$, provenues des combinaisons des parties qui composent les premières avec les racines imaginaires de l'unité, sont imaginaires; et on les omet dans toutes les applications. En effet, l'équation $8d^3 * +6pd=2q$ dégagée de son second terme, et dont le troisième terme est positif, n'a qu'une racine réelle (§ 266).

§ 285. Soit p le produit donné de deux nombres, et soit $2q$ la somme donnée de leurs cubes. On a les équations $\begin{cases} ss-dd=p \\ 2s(ss+3dd)=2q \end{cases}$.

En suivant les mêmes procédés que dans le § précédent, on parvient pour déterminer s à l'équation $8s^3 * -6ps=2q$; et pour déterminer d à l'équation $16d^6+24pd^4+9ppdd+p^3=qq$.

Partant, dans l'équation $8s^3 * -6ps=2q$, $2s$ est la somme de deux quantités dont le produit est p et la somme des cubes $2q$; et ces deux quantités sont $\sqrt[3]{q+\sqrt{(qq-p^3)}}$, et $\sqrt[3]{q-\sqrt{(qq-p^3)}}$ § 283; la valeur de $2s$ dans cette

équation est $\sqrt[3]{q+\sqrt{(qq-p^3)}}+\sqrt[3]{q-\sqrt{(qq-p^3)}}$;
et la valeur de $2d$ est,

$$\sqrt[3]{q+\sqrt{(qq-p^3)}}-\sqrt[3]{q-\sqrt{(qq-p^3)}}.$$

Soit $2s=\sqrt[3]{q+\sqrt{(qq-p^3)}}+\sqrt[3]{q-\sqrt{(qq-p^3)}}$

$$8s^3=2q+3p\left\{\sqrt[3]{q+\sqrt{(qq-p^3)}}+\sqrt[3]{q-\sqrt{(qq-p^3)}}\right\}$$

$=2q+6ps$; donc, $8s^3 * -6ps=2q$.

Rem. 1re. Lorsque $qq>p^3$; les deux parties dont $2s$ est la somme sont l'une et l'autre réelles; et partant, $2s$ est réelle. Les deux autres valeurs de ces deux parties, qui proviennent de la combinaison des premières avec les racines cubiques imaginaires de l'unité, sont imaginaires, de manière que leur somme $2s$, et leur différence $2d$, sont l'une et l'autre imaginaires.

Rem. 2de. Lorsque $qq<p^3$, les deux parties dont $2s$ est la somme sont l'une et l'autre imaginaires; mais leur somme est réelle. En effet, dans ce cas les parties $\sqrt[3]{q+\sqrt{(qq-p^3)}}$ et $\sqrt[3]{q-\sqrt{(qq-p^3)}}$ sont de la forme $(a+b\sqrt{-1})^n$ et $(a-b\sqrt{-1})^n$, dont la somme est réelle (§ 189). Dans le même cas, la différence de ces parties est de la forme $(a+b\sqrt{-1})^n-(a-b\sqrt{-1})^n$ qui est imaginaire (§ 189).

Rem. 3me. Les combinaisons des parties de $2s$ avec les racines imaginaires de l'unité, donnent pour les autres parties de $2s$,

$$\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{q+\sqrt{(qq-p^3)}},\quad \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{q-\sqrt{(qq-p^3)}}$$

$$\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{q+\sqrt{(qq-p^3)}},\quad \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{q-\sqrt{(qq-p^3)}};$$

expressions imaginaires. J'affirme que leur somme $2s$ est réelle, dans la supposition $qq<p^3$.

En effet, pour la première de ces valeurs, la somme $2s$ est composée de la partie réelle

$$-\tfrac{1}{2}\left\{\sqrt[3]{q+\sqrt{(qq-p^3)}}+\sqrt[3]{q-\sqrt{qq-p^3}}\right\}$$

et du produit par $\frac{\sqrt{-3}}{2}$ de la différence imaginaire $\sqrt[3]{q+\sqrt{(qq-p^3)}}-\sqrt[3]{q-\sqrt{(qq-p^3)}}$; mais cette différence a pour facteur l'imaginaire $\sqrt{-1}$; et le produit $\sqrt{-1}\times\frac{\sqrt{-3}}{2}$ est réel, donc cette autre partie de $2s$ est aussi réelle, et partant, $2s$ est réelle. On montre de même que la seconde de ces valeurs de $2s$, composée des parties imaginaires

$$\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{q+\sqrt{(qq-p^3)}},\quad \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{q-\sqrt{(qq-p^3)}},$$

est réelle.

Partant, dans le cas où $qq < p^3$, les valeurs de $2s$ sont toutes les trois réelles, et elles se présentent toutes les trois sous une forme imaginaire. Ce cas, appelé *irréductible*, a beaucoup occupé les Mathématiciens depuis Cardan (auquel on attribue la solution des équations du troisième degré) jusqu'à nos jours (1). La manière dont on a coutume de présenter le procédé par lequel on résout les équations du troisième degré, me paroît propre à donner le souspçon qu'il y a de l'arbitraire dans la décomposition de l'inconnue, et qu'en particulier les formules du cas irréductible ne sont pas nécessaires. La marche que j'ai suivie me paroît ne devoir laisser aucun doute sur la nécessité de ces formules. La géométrie a dans ce cas un avantage sur l'algèbre. Tandis que cette dernière donne les expressions des quantités réelles, dans des formules compliquées (et qu'il me soit permis de le dire entachées) d'imaginaires ; la première réduit la solution du cas irréducti-

---

(1) Ayant soumis ce chapitre à l'examen de mon collègue, le Prof. Maurice ; il m'a communiqué sur le même sujet une Dissertation, qui contient aussi sur la source des formules du cas irréductible des réflexions intéressantes, que je l'invite à faire connoître.

ble à la trisection d'un arc dont le rapport à la circonférence est connu par les coefficiens de l'équation, et dont on connoît aussi dans ces coefficiens le rayon du cercle auquel il appartient.

R. 4me. Les deux équations $8s^3 * -6ps-2q=0$, $8d^3 * +6pd-2q=0$, auxquelles ont conduit les deux questions des §§ 282-284 peuvent représenter une équation quelconque du troisième degré; en effet, par le § 265, on peut toujours dégager une équation de son second terme : le troisième terme aura alors l'un ou l'autre des deux signes + ou — ; et les équations $x^3 * \mp ax-b=0$, coïncident avec les équations $8s^3 * -6ps-2q=0$, $8d^3 * +6pd-2q=0$, en faisant $a=3p$; $x=2s$ dans la première et $x=2d$ dans la seconde. Quant aux équations $x^3 \mp ax+b=0$, soit changé le signe de x, on a $-x^3 \pm ax+b=0$, ou $x^3 \mp ax-b=0$; et partant, les racines des équations $x^3 \mp ax+b=0$, sont les mêmes que les racines des équations $x^3 \mp ax-b=0$, avec le signe contraire. Je vais présenter sur le cas irréductible quelques observations.

§ 286. Lorsqu'une équation du troisième degré est dégagée de son second terme, la somme de ses trois racines est zéro : partant, deux

des trois racines étant ou l'une et l'autre positives, ou l'une et l'autre négatives, la troisième est égale à leur somme avec le signe contraire ; de là, si on appelle $2s$ la plus grande des trois racines (le signe mis à part), les deux autres sont $s+d$ et $s-d$; de manière qu'on a en même tems $x\mp 2s=0$, $x\pm(s-d)=0$, $x\pm(s+d)=0$; et le premier membre de l'équation est le produit continuel,

$$(x\mp 2s)(x\pm(s-d))(x\pm(s+d))=x^3 * -(3ss+dd)x\mp 2s(ss-dd)=0.$$

J'affirme que si s et d sont l'une et l'autre réelles, on a $\left(\frac{3ss+dd}{3}\right)^3>ss(ss-dd)^2$, ou $(3ss+dd)^3>27ss(ss-dd)^2$. En effet,

$$(3ss+dd)^3-27ss(ss-dd)^2=dd(81s^4-18ssdd+d^4)=dd(9ss-dd)^2;$$

quantité toujours positive si s et d sont l'une et l'autre réelles. Or, dans l'équation, $x^3 * -(3ss+dd)x\mp 2s(ss-dd)=0$, la valeur de x est la somme de deux quantités dont le produit est $\frac{3ss+dd}{3}$, et dont la somme des cubes est $2s(ss-dd)$; et pour que ces deux cubes soient réels, et partant aussi leurs racines réelles, on doit avoir,

$ss(ss-dd)^2>\left(\frac{3ss+dd}{3}\right)^3$. Donc, les trois racines étant réelles, et l'une d'elles étant la

somme de deux quantités dont le produit et la somme des cubes sont réels, ces deux dernières quantités ne peuvent pas être réelles : et partant, les trois racines étant réelles, chacune d'elles se présente sous une forme imaginaire.

Dans l'éq. $16d^6+24pd^4+9ppdd+(p^3-qq)=0$ du § 285, si dd est réel, les trois valeurs de dd sont négatives lorsque $p^3>qq$ (§ 262); et partant, les trois valeurs de d sont imaginaires. Donc, dans ce cas, chacune des différences des parties dont $2s$ est la somme est imaginaire; mais la somme de ces parties est réelle; cela ne peut avoir lieu qu'entant que ces parties sont des formes $a+b\sqrt{-1}$, $a-b\sqrt{-1}$; et partant imaginaires.

La solution de celles des équations du troisième degré qui peuvent donner lieu au cas irréductible, a été ramenée à la question, trouver deux cubes dont on connoît la somme et le produit. Cette dernière question est résolue par une seule paire de cubes, soit qu'ils soient réels, soit qu'ils soient imaginaires : donc, la solution de cette question ne peut dans aucun cas donner seule et immédiatement la solution triple des équations du troisième degré. Mais, comme les racines des équations du troisième degré sont les sommes des ra-

cines de ces cubes, et qu'elles proviennent par conséquent des combinaisons de ces racines avec les trois racines cubiques de l'unité, c'est de la nature de ces combinaisons qu'on peut tirer la nature des racines de ces équations. Soient a et b celles des racines de ces cubes qui sont indépendantes des racines cubiques imaginaires de l'unité; les deux autres de ces racines sont $\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}a$, $\frac{-1\mp\sqrt{-3}}{2}b$. Partant, deux des racines d'une équation du troisième degré se présentent généralement sous une forme imaginaire. Que ces deux racines doivent être réelles : pour que cela ait lieu, a et b doivent être l'une de la forme $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, et l'autre de la forme $\alpha-\beta\sqrt{-1}$; et partant, les deux dernières racines étant réelles, la première (aussi réelle) se présente sous la forme de la somme des deux parties imaginaires $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, $\alpha-\beta\sqrt{-1}$. Cette somme réelle est dégagée de la forme imaginaire, lorsque par des opérations algébriques et en termes finis, on peut obtenir séparément α et β; ce qui a lieu en particulier lorsque l'équation proposée a des racines réelles rationnelles.

Soit $2a$ celle des racines d'une équation du troisième degré $x^3 * -3px-2q=0$, qui

est indépendante des racines cubiques imaginaires de l'unité, ensorte qu'on ait $x-a=0$; et $a^3 \ast -3pa-2q=0$; soit divisé par $x-a$ le premier membre de la première équation, on a pour quotient $xx+ax+aa-3p=0$; ou $4xx+4ax+aa+3(aa-4p)=(2x+a)^2+3(aa-4p)=0$. Partant, les deux autres valeurs de x sont imaginaires; 1°. si p change de signe, en sorte qu'on ait l'équation $x^3 \ast +3px-2q=0$; 2°. si p conservant son signe, on a, $aa>4p$. Mais, l'équation étant $x^3 \ast -3px-2q=0$, pour que les deux valeurs de x qui proviennent de l'équation $(2x+a)^2+3(aa-4p)=0$, soient exprimées d'une manière réelle, on doit avoir $aa<4p$, ou bien on doit avoir l'équation $(2x+a)^2-3(4p-aa)=0$; d'où l'on tire $2x=-a\pm\sqrt{3(4p-aa)}$. Mais, a est la somme de deux quantités dont le produit est p, donc, ces deux quantités étant rèelles $aa>4p$ (§87); donc, lorsque $4p>aa$ ces deux parties sont imaginaires. Partant, lorsque les deux secondes valeurs de x sont réelles sa première valeur est exprimée dans la somme de deux quantités imaginaires; et partant, lorsque les trois valeurs de x sont réelles, l'expression générale de chacune d'elles est imaginaire.

§ 287. Nous avons vu (§91) que la somme

$\sqrt{(a+\sqrt{b})}+\sqrt{(a-\sqrt{b})}$ peut se présenter sous la forme d'un seul radical, qui est $\sqrt{(2a+2\sqrt{(aa-b)})}$; et en particulier, que la somme des deux radicaux imaginaires du second degré $\sqrt{(a+\sqrt{-b})}$, $\sqrt{(a-\sqrt{-b})}$, est le radical réel $\sqrt{(2a+2\sqrt{(aa+b)})}$. Il n'en est pas de même des formules radicales du troisième degré. En effet, soit $\sqrt[3]{(a+\sqrt{b})}+\sqrt[3]{(a-\sqrt{b})}=z$, soient pris les cubes des deux membres, $2a+3\sqrt[3]{(aa-b)}(\sqrt[3]{(a+\sqrt{b})}+\sqrt[3]{(a-\sqrt{b})})=z^3$; de là, $z^3 * -3z\sqrt[3]{(aa-b)}-2a=0$; la détermination de z dépend donc de la solution d'une équation cubique composée. Si $aa-b$ est un cube, le coefficient de z est rationel, et si z a quelque valeur entière et rationnelle dans cette équation, elle est aussi la valeur de la somme des deux radicaux cubiques proposés. Si $\sqrt{b}$ est imaginaire de la forme $\sqrt{-b}$ le signe de l'imaginaire disparoît dans les coefficiens de l'équation; et on a,

$$z^3 * -3z\sqrt[3]{(aa+b)}-2a=0.$$

Lorsque l'équation dont les racines sont exprimées en quantités radicales cubiques, a des racines réelles et commensurables, chacune des deux quantités qui sont sous le signe radical est un cube; et l'extraction de la racine

cubique est réduite à trouver l'équation dont l'assemblage de ces quantités radicales est la racine : je vais éclaircir cette assertion par quelques exemples.

1er. *Ex.* Peut-on extraire la racine cubique de $26+15\sqrt{3}$.

Soit $26+15\sqrt{3}=(x+\sqrt{y})^3$.
aussi $26-15\sqrt{3}=(x-\sqrt{y})^3$. $676-675=(xx-y)^3$;

$xx-y=1$; $y=xx-1$.

$26=x^3+3xy=x^3+3x(xx-1)=4x^3-3x$.

$8x^3-6x=52$. Soit $2x=z$; $z^3-3z-52=0$.

La valeur entière et rationnelle de z dans cette équation est 4 ; donc, $x=2$, $y=3$.

$\sqrt[3]{(26\pm15\sqrt{3})}=2\pm\sqrt{3}$.

2^d^. *Ex.* Soit $\sqrt[3]{(5\sqrt{2}+7)}=\sqrt{y}+x$, $\sqrt[3]{(5\sqrt{2}-7)}=\sqrt{y}-x$; $1=y-xx$; $y=xx+1$.

$5\sqrt{2}+7=(\sqrt{y}+x)^3$
$5\sqrt{2}-7=(\sqrt{y}-x)^3$; $7=3xy+x^3$; $4x^3+3x=7$;

dans cette équation x a la valeur entière et rationnelle 1 ; et $y=2$; donc,

$\sqrt[3]{(5\sqrt{2}\pm7)}=\sqrt{2}\pm1$.

3me. *Ex.* Soit,

$\sqrt[3]{(2+11\sqrt{-1})}=x+\sqrt{-y}$
$\sqrt[3]{(2-11\sqrt{-1})}=x-\sqrt{-y}$; $5=xx+y$; $y=5-xx$.

$2=x^3-3xy=x^3-3x(5-xx)=4x^3-15x$;

$8x^3-30x=4$; soit $2x=z$; $z^3-15z=4$.

Dans cette équation, $z=4$, $x=2$; et de là, $y=1$. Donc, $\sqrt[3]{(2\pm 11\sqrt{-1})}=2\pm\sqrt{-1}$.

En général, soit $\sqrt[3]{(a\pm\sqrt{b})}=(x\pm\sqrt{y})\sqrt[3]{z}$; $\sqrt[3]{(aa-b)}=(xx-y)\sqrt[3]{zz}$.

1°. Que $aa-b$ soit un cube c^3 soit fait $z=1$; on a, $xx-y=c$; $y=xx-c$; $a=x^3+3xy=4x^3-3cx$. Si l'équation $4x^3 * -3cx-a=0$, a quelque racine rationnelle, on peut extraire les racines cubiques de $a\pm\sqrt{b}$.

2°. Que $aa-b$ ne soit pas un cube; on a, $\sqrt[3]{z(aa-b)}=z(xx-y)$; soit multiplié $aa-b$ par un nombre z tel, que le produit $z(aa-b)$ soit un cube c^3; on a, $z(xx-y)=c$; $zy=zxx-c$; $a=z(x^3+3xy)=zx^3+3x(zxx-c)$; $4zx^3-3cx-a=0$. Dans cette équation, si x a une valeur rationnelle, on peut extraire les racines cubiques des quantités $a\pm\sqrt{b}$.

Soit de même $\sqrt[3]{(a\pm\sqrt{-b})}=(x\pm\sqrt{-y})\sqrt[3]{z}$. $\sqrt[3]{(aa+b)}=(xx+y)\sqrt[3]{zz}$. 1°. Soit $aa+b$ un cube c^3, soit fait $z=1$; $xx+y=c$; $y=c-xx$; $a=x^3-3xy=4x^3-3cx$, ou $4x^3-3cx-a=0$; 2°. soit $z(aa+b)=c^3$; $4zx^3-3cx-a=0$: on peut extraire les racines cubiques des binomes proposés, si les équations $4x^3 * -3cx-a=0$, $4zx^3-3cx-a=0$, ont des racines commensurables.

Ex. Soit $\sqrt[3]{(52+30\sqrt{3})}=(x+\sqrt{y})\sqrt[3]{z}$; $52^2=2704$, $3\times30^2=2700$; $52^2-3.30^2=4$; soit $z=2$; $2(xx-y)=2$; $y=xx-1$; $52=2(x^3+3xy)=2(x^3+3x(xx-1))=2(4x^3-3x)$; $8x^3-6x=52$. Soit $2x=z$; $z^3-3z=52$; $z=4$, $x=2$, $y=3$. $\sqrt[3]{(52+30\sqrt{3})}=(2+\sqrt{3})\sqrt[3]{2}$; $52+30\sqrt{3}=2(2+\sqrt{3})^3$

§ 288. Problèmes proposés comme exercices.

Trouver deux nombres dont on connoît la somme et la différence des cubes.

Trouver deux nombres dont on connoît la différence et la somme des cubes.

Trouver deux nombres dont on connoît la somme ou la différence, et la différence des quatrièmes puissances.

Trouver deux nombres dont on connoît la différence, et le produit du carré du plus petit par le plus grand; et trouver deux nombres dont on connoît la somme, et le produit du carré de l'un par l'autre.

Trouver deux nombres dont on connoît la différence et le produit du carré du plus grand par le plus petit.

Trouver deux nombres dont on connoît la somme ou la différence des carrés, et la somme ou la différence des cubes.

On demande un parallelipipède à base carrée, dont on connoît la surface et la capacité. *Item*, que la base au lieu d'être un carré soit un rectangle dont on connoît le rapport des côtés de la base.

On demande un cône droit dont on connoît la surface courbe et la capacité; *item*, on connoît le côté et la capacité.

Partager un nombre donné en deux parties, de manière que le cube d'une des parties soit égal au produit du carré de l'autre partie par un nombre donné : *item*, que le cube de la première partie soit égal au produit de l'autre partie par le carré d'un nombre donné : *item*, que le premier nombre donné soit la différence des deux nombres cherchés.

Partager un nombre donné a deux fois en deux parties, de manière que le produit p d'une partie d'une des divisions par une partie de l'autre soit donné ; et que la somme $2c$ des cubes des deux autres parties soit aussi donnée.

Item, la somme $2c''$ des carrés des deux premières parties est donnée ; et la somme $2c'''$ des cubes des deux autres parties est aussi donnée.

Trouver le nombre qu'on doit ajouter à deux nombres donnés, ou dont on doit ôter

deux nombres donnés, pour que la somme des cubes des deux sommes ou des deux différences, soit donnée.

Trouver trois nombres en connoissant leur somme, la somme de leurs carrés, et la somme de leurs cubes.

Trouver trois nombres en proportion géométrique continue en connoissant leur somme et la somme de leurs cubes.

Trouver quatre nombres en progression géométrique, en connoissant, 1°. la différence des extrêmes et la somme des moyens; 2°. la somme des extrêmes et la différence des moyens; 3°. la somme des moyens, et la somme des carrés des extrêmes; 4°. la somme des extrêmes et la somme des cubes des moyens; 5°. l'excès de la somme des extrêmes sur la somme des moyens, et la somme des carrés des quatre termes.

Trouver sept nombres en progression géométrique, en connoissant la somme des termes impairs et la somme des termes pairs.

Comme un exemple de la liaison qui peut régner entre des questions qui se présentent comme différentes: je vais développer l'une des questions précédentes, telle que la quatrième. Trouver deux nombres dont la diffé-

rence est donnée $3a$; et dont on connoît le produit $2p$ du carré du plus petit par le plus grand.

Dén. Soit le petit nombre, x; le plus grand sera $3a+x$; produit du carré du petit par le grand, $xx(3a+x)$.

Cond. $xx(3a+x)=2p$; ou $x^3+3axx*=2p$.

Réd. Soit $x=z-a$; on a, $z^3*-3aaz+2a^3=2p$; ou $z^3*-3aaz+2(a^3-p)=0$;

$$z=\sqrt[3]{p-a^3+\sqrt{(p(p-2a^3))}}+\sqrt[3]{p-a^3-\sqrt{(p(p-2a^3))}}.$$

1°. Soit $p>2a^3$; z est exprimée dans la somme de deux quantités réelles, et alors les deux autres valeurs de z sont imaginaires. 2°. Soit $p<2a^3$; z est exprimée dans la somme de deux quantités imaginaires, et elle est réelle; Les deux autres valeurs de z, qui proviennent des combinaisons des parties de sa première valeur avec les racines cubiques imaginaires de l'unité, sont aussi réelles ; et elles répondent à la question dans laquelle $3a$ est la somme, et non la différence, des deux parties cherchées. En effet, qu'on demande de partager $3a$ en deux parties, de manière que le solide du carré de l'une par l'autre soit $2p$. On a l'équation $xx(3a-x)=2p$; ou $x^3-3axx+2p=0$. Dans l'équation relative au premier problème,

$x^3+3axx-2p=0$, soit changé le signe de x^3, on a, $-x^3+3axx-2p=0$, ou $x^3-3axx+2p=0$. Partant, les racines de la seconde équation $x^3-3axx+2p=0$, différent par le signe des racines de l'équation $x^3+3axx-2p=0$, et partant, ces deux questions (quand elles sont l'une et l'autre possibles) sont résolues en même tems.

Pour mieux faire sentir la liaison qui règne entre ces deux questions; soit y la plus grande des deux quantités cherchées suivant le premier énoncé, et $y-3a$ la plus petite, on a, l'équation $y(y-3a)^2=2p$. Mais les deux produits $y(y-3a)^2$, et $y(3a-y)^2$ étant développés, se présentent de la même manière, $y^3-6ayy+9aayy$; donc, l'équation, $y^3-6ayy+9aay=2p$, répond à chacune des deux questions (si elles sont l'une et l'autre possibles), dans l'une desquelles $3a$ est la somme des deux parties cherchées, et dans l'autre desquelles $3a$ est l'excès de la première partie sur la seconde. La première question suivant laquelle $3a$ est l'excès d'une des parties sur celle dont le carré entre comme facteur est toujours résolue. La seconde question est résoluble seulement lorsque $p\leqq 2aa$, ou $2p\leqq 4a^3$. Lorsque $2p=4a^3$, les deux parties sont $2a$ et a ; j'affirme qu'alors le produit $4aa\times a$ est le plus grand.

En effet, que les deux parties de $3a$ soient $2a \pm z$, et $a \mp z$; on a,
$4aa \times a - (2a \pm z)^2(a \mp z) = zz(3a \pm z)$, et partant, le premier produit est toujours plus grand que le second. Soit $2p = 4a^3$, l'équation relative à la seconde question est,
$x^3 - 3axx + 4a^3 = (x+a)(x-2a)^2 = 0$; dans cette équation x a deux valeurs égales à $2a$, et une valeur égale à $-a$, les deux premières répondent à la seconde question pour la plus grande valeur du produit, et la seconde est la valeur correspondante de x qui résout la première question. Lorsque $x^3 - 3axx + 4a^3 = 0$ on a aussi (§ 271) $3xx - 6ax = 3x(x-2a) = 0$; qui donne $x = 2a$, valeur commune aux deux équations $x^3 - 3axx + 4a^3 = 0$, $x(x-2a) = 0$ (1).

§ 289. La complication des formules par lesquelles sont exprimées les racines des équations cubiques, même lorsque les deux parties qui les composent sont réelles, rend difficile leur application dans le cas où la racine seule réelle est irrationnelle. En effet, le calcul de cette racine exige une double extraction de racines

---

(1) Les applications à la mécanique du maximum que je viens de développer m'ont engagé à entrer à ce sujet dans quelques détails. Il est aisé de le réduire au maximum relatif au rectangle des deux parties d'une somme donnée.

cubiques de quantités composées d'une partie rationnelle et d'une partie irrationnelle; on doit donc pousser fort loin l'approximation de cette dernière partie, afin d'obtenlr un résultat suffisamment approximatif. Quant aux formules rélatives au cas irréductible; elles ne peuvent donner des résultats réels, et partant applicables, que par la réduction en suite conformément aux formules binomiales; or, cette réduction donne souvent des suites peu convergentes, et par conséquent d'une application difficile. Aussi, dans les cas où les racines d'une équation sont incommensurables; on préfère les méthodes d'approximation qui sont indépendantes de ces formules. La plus générale et la plus expéditive de ces méthodes est celle qui est tirée des fractions continues. LA GRANGE l'a exposée dans ses Ouvrages déjà cités, de manière à ne rien laisser à désirer, tant sur ses principes que sur ses applications. Il me suffira (eu égard à la destination de cet Ouvrage), d'en esquisser la marche, en l'éclaircissant par quelques exemples.

§ 290. *Théor.* Soit une équation quelconque; soient deux nombres m et n, tels, qu'étant substitués à l'inconnue ils donnent des résultats de signes contraires : j'affirme que l'équa-

tion a au moins une racine réelle comprise entre ces deux nombres.

Soient $a, b, c, d, \ldots$ les racines de l'équation; de manière que le premier membre est le produit continuel $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\ldots$ les deux produits $(m-a)(m-b)(m-c)(m-d)\ldots$ $(n-a)(n-b)(n-c)(n-d)\ldots$ sont donc de signes contraires : pour cela il faut que deux au moins des facteurs correspondans de ces produits soient de signes contraires, et par exemple, si $a<m$, $a>n$; et partant, une des racines a est comprise entre m et n.

Cor. Si les nombres m et n diffèrent entr'eux de l'unité seulement, par la substitution de l'un d'eux à l'inconnue on se trompe moins que d'une unité sur la valeur de cette inconnue.

1[er]. *Ex.* On demande d'extraire la racine cubique de 2 par les fractions continues.

$\sqrt[3]{2}>1<2$; soit $\sqrt[3]{2}=1+\frac{1}{x}$; $2=1+\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}$;

ou $X=x^3-3x^2-3x-1=0$. Soit $x=3$; $X=-10$; soit $x=4$, $X=+3$. Donc la valeur de x, moyenne entre 3 et 4, approche de 4 plus qu'elle n'approche de 3. Soit $x=4-\frac{1}{x'}$; on obtient par ce procédé la suite d'équations suivantes.

$$X = x^3 - 3x^2 - 3x - 1 = 0$$

$$x = 4 - \frac{1}{x'}; \quad X' = 3x'^3 - 21x'^2 + 9x' - 1 = 0$$

$$x' = 6 + \frac{1}{x''}; \quad X'' = 55x''^3 - 81x''^2 - 33x'' - 3 = 0$$

$$x'' = 2 - \frac{1}{x'''}; \quad X''' = 45x'''^3 - 303x'''^2 + 249x''' - 55 = 0$$

$$x''' = 6 - \frac{1}{x^{IV}}; \quad X^{IV} = 251x^{IV^3} - 1473x^{IV} + 507x^{IV} - 45 = 0$$

$$x^{IV} = 5 + \frac{1}{x^{V}} \ldots\ldots$$

$\sqrt[3]{2} = 1 + \left(\frac{1}{4}, \frac{6}{23}, \frac{13}{50}, \frac{72}{277}, \frac{347}{1335}, \ldots\ldots\right)$. Les deux dernières de ces fractions sont exactes jusqu'aux 100000mes.

2^d. *Ex.* Soit,

$$\sqrt[3]{3} = 1 + \frac{1}{x}; \quad X = 2x^3 - 3x^2 - 3x - 1 = 0$$

$$x = 2 + \frac{1}{x'}; \quad X' = 3x'^3 - 9x'^2 - 9x' - 2 = 0$$

$$x' = 4 - \frac{1}{x''}; \quad X'' = 10x''^3 - 63x''^2 + 27x'' - 3 = 0$$

$$x'' = 6 - \frac{1}{x'''}; \quad X''' = 51x'''^3 - 351x'''^2 + 117x''' - 10 = 0$$

$$x''' = 6 + \frac{1}{x^{IV}}; \quad X^{IV} = 928x^{IV^3} - 1413x^{IV^2} - 567x^{IV} - 51 = 0$$

$$x^{IV} = 2 - \frac{1}{x^{V}}; \quad X^{V} = 587x^{V^3} - 4917x^{V^2} + 4155x^{V} - 928 = 0.$$

$\sqrt[3]{3} = 1 + \left(\frac{1}{2}, \frac{4}{9}, \frac{23}{52}, \frac{134}{305}, \frac{291}{658}, \ldots\ldots\right.$

3me. *Ex.* Trouver deux nombres tels, que le cube de l'un d'eux est égal au produit du carré de l'autre par leur somme.

Soit désignée la somme de ces deux nombres par l'unité ; le premier nombre est une fraction laquelle soit désignée par $\frac{1}{x}$; on a,

$\frac{1}{x^3}=(1-\frac{1}{x})^2$; et partant, $X=x^3-2x^2+x-1=0$.

$$x=2-\frac{1}{x'}; \quad X'=x'^3-5x'^2+4x'-1=0$$

$$x'=4+\frac{1}{x''}; \quad X''=x''^3-12x''^2-7x''-1=0$$

$$x''=13-\frac{1}{x'''}; \quad X'''=77x'''^3-202x'''^3+27x'''-1=0$$

$$x'''=2+\frac{1}{x^{IV}}; \quad X^{IV}=139x^{IV^3}-153x^{IV^2}-260x^{IV}-77=0$$

$$x^{IV}=2+\frac{1}{x^{V}}; \quad X^{V}=139x^{V^3}-796x^{V^2}-661x^{V}-139=0;$$

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{2},\ \frac{4}{7},\ \frac{53}{93},\ \frac{102}{179},\ \frac{257}{451},\ \ldots\ldots$$

$$1-\frac{1}{x}=\frac{1}{2},\ \frac{3}{7},\ \frac{40}{93},\ \frac{77}{179},\ \frac{194}{451},\ \ldots\ldots$$

Aut. exerc. Trouver deux nombres tels, que le cube de l'un d'eux soit égal au produit de l'autre par le carré de leur somme.

5me. *Ex.* Soit l'équation $X=x^3-15x^2+63x-50=0$.

Aux valeurs de x, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, répondent les valeurs de X, -50, -1, +24, +31, +26, +15, +4, -1, +6.

Partant, x a trois valeurs; dont l'une est comprise entre 1 et 2, et plus voisine de 1 que de 2; la seconde est comprise entre 6 et 7, et la troisième est comprise entre 7 et 8; et l'une et l'autre de ces dernières sont plus voisines de 7 qu'elles ne sont voisines de 6 et de 8.

1°. Soit $x=1+\frac{1}{x'}$; $X'=x'^3-36x'^2+12x'-1=0$

$x'=36-\frac{1}{x''}$; $X''=431x''^3-1308x''^2+72x''-1=0$

$x''=3-\frac{1}{x'''}$; $X'''=80x'''^3-3861x'''^2+2571x'''-431=0$

$x=1+(\frac{1}{36}, \frac{3}{107}, \ldots\ldots)$. En faisant $x=1+\frac{3}{107}=\frac{110}{107}$; on trouve $X=\frac{3}{101}$ environ; on se trompe seulement de $\frac{1}{545700}$ environ sur la valeur de x.

2°. Soit $x=7-\frac{1}{x'}$; $X'=x'^3 * -6x'+1=0$.

$x'=2+\frac{1}{x''}$; $X''=3x''^3-6x''^2-6x''-1=0$.

$x''=3-\frac{1}{x'''}$; $X'''=8x'''^3-39x'''^2+21x'''-3=0$.

$x'''=4+\frac{1}{x^{IV}}$; $X^{IV}=31x^{IV\,3}-93x^{IV\,2}-57x^{IV}-8=0$.

$x^{IV}=3+\frac{1}{x^{V}}\ldots\ldots$

3°. Soit $x=7+\frac{1}{x'}$; $X'=x'^3 \ast\ -6x'-1=0$.

$x'=2+\frac{1}{x''}$; $X''=5x'^3-6x'^2-6x'-1=0$.

$x''=2-\frac{1}{x'''}$; $X'''=3x''^3-30x''^2+24x''-5=0$.

$x'''=9+\frac{1}{x^{IV}}$; $X^{IV}=32x^{IV3}-213x^{IV2}-51x^{IV}-3=0$.

$x^{IV}=7+\frac{1}{x^{V}}$; .....

Ces exemples suffisent pour montrer la marche de ce procédé approximatif, lequel consiste à trouver les nombres entiers les plus voisins des racines des équations successives auxquelles est ramenée l'équation proposée.



CHAPITRE XXII.

Sur les Equations du quatrième degré.

§ 290. Les équations du quatrième degré les plus simples sont celles qui renferment seulement la quatrième puissance de l'inconnue égale à une quantité connue; ou qui sont de la forme $x^4=a^4$; de là, $x^4-a^4=(xx-aa)(xx+aa)=0$; et partant, x a les deux valeurs réelles, $\pm a$, et les deux valeurs imaginaires $\pm a\sqrt{-1}$.

Dans le chap. VIIme, 3me. Section, nous avons traité des équations bicarrées, qui sont aussi des équations du quatrième degré, mais susceptibles d'être ramenées au second. Nous avons vu qu'une même question, suivant les différentes manières de la traiter, peut donner lieu à une équation bicarrée seulement, ou à une équation complète du quatrième degré. Pour que cette dernière soit réduite à la première, il faut que le second terme et le quatrième puissent évanouir en même tems. Mais, (§ 265) le second terme évanouit en substituant à l'inconnue une autre inconnue altérée

du

du quart du coefficient du second terme; on est donc appelé à rechercher dans quels cas cette substitution fait évanouir en même tems le quatrième terme.

Soit $x^4 - 4p'x^3 + p''x^2 - p'''x + p^{IV} = 0$; par la substitution de $z + p'$ à x, le second terme évanouit, le coefficient du quatrième terme devient $-(8p'^3 - 2p'p'' + p''')$; et ce coefficient évanouit lorsqu'on a $p''' = 2p'(p'' - 4p'^2)$. Cela a lieu lorsque le premier membre de l'équation est le produit de deux facteurs trinomes dont les seconds termes sont les mêmes et ont le même signe : soient ces deux trinomes $xx + 2px + q$, $xx + 2px + q'$, leur produit est,
$x^4 + 4px^3 + (4pp + q + q')x^2 + 2p(q + q')x + qq'$;
et on a $2p(4pp + q + q' - 4pp) = 2p(q + q')$;
alors, la somme de deux des racines de l'équation proposée est la même que la somme des deux autres, soit quant à la grandeur, soit quant au signe.

1er. *Ex.* Trouver deux nombres dont on connoît la somme $2s$, et la somme des quatrièmes puissances $2c$ (v. § 113). Soient ces deux nombres x et $2s - x$; somme des quatrièmes puissances, $2(x^4 - 4sx^3 + 12ssxx - 16s^3x + 8s^4) = 2c$;
On a, $p' = s$; $p'' = 12ss$; $p''' = 16s^3$; $p'' - 4p'^2 = 8ss$;
$p''' = 2s \times 8ss = 16s^3$; donc le second terme

et le quatrième évanouissent en même tems en faisant $x=z+s$; on a l'équation bicarrée $z^4+6sszz+s^4=c$.

2^d. *Ex.* Trouver deux nombres dont on connoît la somme et la somme des cinquièmes puissances.

3me. *Ex.* Soit $X=x^4-10x^3+35x^2-50x+24=0$; $2p'=5$, $p''=35$, $4p'^2=25$, $p''-4p'^2=10$, $2p'(p''-4p'^2)=50=p'''$. Donc, l'équation proposée est réductible à une équation bicarrée. Soit fait, $2x=z$, on a, $z^4-20z^3+140z^2-400z+384=0$ Soit $z=v+5$; on a, $v^4-10v^2+9=0$. $vv-5=\pm 4$; $vv=9,1$; $v=\pm 3, \pm 1$; $z=8, 2, 6, 4$; $x=4, 1, 3, 2$; ici, $4+1=3+2$.

§ 291. Lorsque dans une équation du quatrième degré, le coefficient du quatrième terme divisé par le coefficient du second, donne pour quotient la racine du cinquième terme; ce premier membre est le produit de deux facteurs trinomes, dont les troisièmes termes sont les mêmes, soit quant à la grandeur soit quant aux signes; il est aisé de déterminer ces trinomes, et de ramener la solution de l'équation à celle de deux équations du second degré.

1°. $(xx+px+q)(xx+p'x+q)=x^4+(p+p')x^3+(2q+pp')x^2+(p+p')qx+qq$.

2°. $(xx+px-q)(xx+p'x-q)=x^4+(p+p')x^3+(pp'-2q)x^2-(p+p')qx+qq$.

3°. Que les troisièmes termes des deux trinomes soient égaux mais de signes différens; on a, $(xx+px+q)(xx+p'x-q)=$ $x^4+(p+p')x^3+pp'x^2+(p'-p)qx-qq$. Soit divisé le coefficient du quatrième terme par la racine du cinquième; le coefficient du second terme et le quotient sont la somme et la différence de deux quantités dont le produit est égal au coefficient du troisième terme. Je vais éclaircir ces différens cas par des exemples.

1°. *Ex.* Soit $x^5-a^5=(x-a)(x^4+ax^3+a^2x^2+a^3x+a^4)=0$. $=(x-a)(xx+pax+aa)(xx+p'ax+aa)$; on a, $p+p'=1, pp'+2=1$; delà, $p=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$; $p'=-\frac{\sqrt{5}-1}{2}$;

$x^4+ax^3+a^2x^2+a^3x+a^4=$

$$(xx+\frac{\sqrt{5}+1}{2}ax+aa)(xx-\frac{\sqrt{5}-1}{2}ax+aa).$$

De là, on obtient quatre valeurs imaginaires de la racine cinquième de l'unité, outre la valeur réelle. On a de même,

$$x^5+a^5=(x+a)(xx-\frac{\sqrt{5}+1}{2}ax+aa)(xx+\frac{\sqrt{5}-1}{2}ax+aa).$$

2^d^. *Ex.* Soit $X=x^4-14x^3+58x^2-70x+25=0$; on a, $\sqrt{25}=5$; $70:5=14$. donc, $p+p'=14$, $pp'+10=58$; de là, $p=8$, $p'=6$.
$X=(xx-6x+5)(xx-8x+5)$; les quatre valeurs de x sont $1, 5, 4+\sqrt{11}, 4-\sqrt{11}$.

3me. *Ex.* Soit $X = x^4 - 6x^3 * + 24x + 16 = 0$.
$\sqrt{16} = 4$; $24 : 4 = 6$; de là,
$X = (xx - 4x - 4)(xx - 2x - 4)$; valeurs de x, $2(1 \pm \sqrt{2})$, $1 \pm \sqrt{5}$.

4me. *Ex.* Soit $X = x^4 + 6x^3 + 14x^2 + 18x + 9 = 0$.
$\sqrt{9} = 3$; $18 : 3 = 6$; de là,
$X = (xx + 4x + 3)(xx + 2x + 3)$; partant, x a les deux valeurs réelles $-1, -3$; et les deux valeurs imaginaires $1 \pm \sqrt{-2}$.

5me. *Ex.* Soit $X = x^4 + 12x^3 + 35x^2 + 6x - 9 = 0$.
$\sqrt{9} = 3$; $6 : 3 = 2$; de là, $p + p' = 12$, $p - p' = 2$; $p = 7, p' = 5$; $pp' = 35$; $X = (xx + 5x + 3)(xx + 7x - 3)$; valeurs de x, $\frac{-5 \pm \sqrt{13}}{2}$, $\frac{-7 \pm \sqrt{61}}{2}$.

6me. *Ex.* Soit $X = x^4 - 2x^3 - 35x^2 - 36x - 9 = 0$;
$\sqrt{9} = 3$, $36 : 3 = 12$; $p + p' = -2$; $p - p' = -12$;
$p = -7$, $p' = +5$; $pp' = -35$;
$X = (xx + 5x + 3)(xx - 7x - 3)$; valeurs de x, $\frac{7 \pm \sqrt{61}}{2}$, $\frac{-5 \pm \sqrt{13}}{2}$.

Exerc. proposé. Partager un nombre donné a deux fois en deux parties, de manière que le produit p d'une partie d'une des divisions par une partie de l'autre, soit donné; et que la somme $2c$ des carrés des deux autres parties soit aussi donnée.

Rem. Cet énoncé renferme aussi les cas dans lesquels a est une double différence au lieu d'être une double somme ; savoir, le cas où a est l'excès des premières parties sur les secondes, et celui où il est l'excès des secondes parties sur les premières (1).

Après l'exposition de quelques cas particuliers qui facilitent la solution des équations du quatrième degré réductibles à ces cas : je passe à la solution générale de ces équations.

§ 292. Une équation du quatrième degré

(1) L'avantage de l'algèbre de donner des solutions générales, qui s'appliquent non seulement aux cas qu'on a immédiatement en vue, mais encore à ceux qui sont liés avec eux ; est souvent compensé par la difficulté qui en résulte d'obtenir seule la solution des premiers. Pour que cette œuvre de surérogation de l'algèbre fut toujours méritoire, il faudroit qu'elle fournit toujours les moyens de distinguer les unes des autres les questions principales et les questions secondaires comprises sous un même énoncé. Or, ceci n'arrive que bien rarement. De là, naît en grande partie la difficulté de la solution des problèmes composés, et l'état d'imperfection de la théorie générale des équations. Ainsi, lorsqu'on demande de partager deux nombres donnés inégaux de la manière énoncée dans l'exercice proposé ; il est difficile de distinguer les uns des autres et de traiter séparément le cas proposé comme principal, et les cas sécondaires étroitement liés avec lui.

peut toujours être ramenée à une équation du même degré dégagée de son second terme (§ 265) ; sous cette dernière forme, la somme des quatre racines est zéro (§ 259) ; partant, la somme de deux d'entr'elles est égale à la somme des deux autres avec le signe contraire. Soit la somme des deux premières $+2s$, la somme des deux dernières est $-2s$; soit $2d$ la différence des deux premières, et soit $2d'$ la différence des deux dernières. Les quatre racines sont $s+d$, $s-d$, $-s+d'$, $-s-d'$; le second membre de l'équation étant zéro, le premier membre est le produit des deux trinomes $(x-s)^2-dd$, $(x+s)^2-d'd'$, lequel produit est $x^4 * -x^2(2ss+dd+d'd')-2sx(dd-d'd')+(ss-dd)(ss-d'd')$.

Soit l'équation $x^4 * -p''x^2-p'''x+p^{\text{IV}}=0$. Soient égalés entr'eux les coefficiens des puissances semblables de x; on a les trois équations ; $2ss+dd+d'd'=p''$; $dd-d'd'=\frac{p'''}{2s}$; $(ss-dd)(ss-d'd')=p^{\text{IV}}$: des deux premières de ces équations, on tire :

$$dd=\tfrac{1}{2}p''-ss+\frac{p'''}{4s},\quad d'd'=\tfrac{1}{2}p''-ss-\frac{p'''}{4s};$$

$$ss-dd=2ss-\tfrac{1}{2}p''-\frac{p'''}{4s};\quad ss-d'd'=2ss-\tfrac{1}{2}p''+\frac{p'''}{4s};$$

$$(ss-dd)(ss-d'd')=(2ss-\tfrac{1}{2}p'')^2-\frac{p'''^2}{16ss}=p^{\text{IV}};$$

de là, $64s^6 - 32p''s^4 - 4(4p^{IV} - p''^2)ss - p'''^2 = 0$. Le carré $4ss$ de la somme de deux des racines est donc une des racines d'une équation du troisième degré.

On peut rendre raison, comme il suit, de cette réduction. Soient a, b, c, d, les quatre racines d'une équation du quatrième degré qui n'a point de second terme, ensorte qu'on ait $a+b+c+d=0$; on tire de là les trois équations $a+b=-(c+d)$, $a+c=-(b+d)$, $a+d=-(b+c)$.

Comme le carré d'une quantité est le même quel que soit son signe, le carré de l'une des six sommes qu'on obtient en prenant les quatre racines deux à deux n'a que trois valeurs; il dépend, par conséquent, de la solution d'une équation du troisième degré.

Les quatre racines de l'équation proposée étant $s+d$, $s-d$, $-s+d'$, $-s-d'$; les sommes de la première et de chacune des trois autres sont $2s$, $d+d'$, $d-d'$; partant, les trois quantités $4ss$, $(d+d')^2$, $(d-d')^2$, sont déterminées par une même équation du troisième degré. Soient les trois racines de cette équation, l, m, n ; on a, $2s=\sqrt{l}$, $d+d'=\sqrt{m}$, $d-d'=\sqrt{n}$; de là, $s+d=\dfrac{\sqrt{l}+\sqrt{m}+\sqrt{n}}{2}$,

$s-d=\frac{\sqrt{l}-\sqrt{m}-\sqrt{n}}{2}$, $-s+d'=\frac{-\sqrt{l}+\sqrt{m}-\sqrt{n}}{2}$, $-s-d'=\frac{-\sqrt{l}-\sqrt{m}+\sqrt{n}}{2}$; ce sont là les quatre racines de l'équation proposée du quatrième degré.

EULER, démontre comme il suit synthétiquement (1), ce que nous venons de trouver analytiquement. Soit $x=\sqrt{l}+\sqrt{m}+\sqrt{n}$; $x^2=l+m+n+2\sqrt{lm}+2\sqrt{ln}+2\sqrt{mn}$;
$x^2-(l+m+n)=2\sqrt{lm}+2\sqrt{ln}+2\sqrt{mn}$;
$x^4-2x^2(l+m+n)+(l+m+n)^2$
$=4lm+4ln+4mn+8\sqrt{lmn}(\sqrt{l}+\sqrt{m}+\sqrt{n})$
$=4lm+4ln+4mn+8x\sqrt{lmn}$;
$x^4 * -2x^2(l+m+n)-8x\sqrt{lmn}+(l+m+n)^2-4(lm+ln+mn)=0$.
Soit comparée cette équation avec l'équation $x^4 * -p''x^2-p'''x+p^{IV}=0$; on a, $2(l+m+n)=p''$, $(l+m+n)^2-4(lm+ln+mn)=p^{IV}$; $8\sqrt{lmn}=p'''$, partant, les quantités l, m, n, sont déterminées par les trois conditions, $l+m+n=\frac{1}{2}p''$, $lm+ln+mn=\frac{1}{16}p''^2-\frac{1}{4}p^{IV}$; $lmn=\frac{1}{64}p'''^2$; et partant, l'une d'elles telle que l est déterminée par l'équation, $64l^3-32p''l^2+4(p''^2-4p^{IV})l-p'''^2=0$ (§ 257). On parvient à la même équation en prenant pour x chacune des différences, $\sqrt{l}-\sqrt{m}-\sqrt{n}$, $-\sqrt{l}+\sqrt{m}-\sqrt{n}$, $-\sqrt{l}-\sqrt{m}+\sqrt{n}$.

---

(1) Voyez, *Elémens d'Algèbre*, chap. XV.

On peut présenter d'une manière un peu différente la réduction des équations du quatrième degré à celles du troisième. Soit l'équation $x^4 * - p'' x^2 - p''' x + p^{IV} = 0$ dégagée de son second terme; soit $xx - zx + v$ un des trinomes provenus de deux des facteurs binomes auxquels donnent lieu deux de ses racines; l'autre sera $xx + zx + v'$; leur produit est $x^4 * - (zz - v - v')x^2 - (v' - v)zx + vv'$. Soient égalés entr'eux les coefficiens des termes semblables, on a, $zz - v - v' = p''$, $z(v' - v) = p'''$, $vv' = p^{IV}$; des deux premières équations, on tire, $2v' = zz - p'' + \frac{p'''}{z}$;

$$2v = zz - p'' - \frac{p'''}{z};\ 4vv' = (zz - p'')^2 - \frac{p'''^2}{zz} = 4p^{IV}.$$

$z^6 - 2p''z^4 - zz(4p^{IV} - p''^2) - p'''^2 = 0$. Cette équation est la même que la précédente, en faisant $z = 2s$; en effet, dans les trinomes, $xx - zx + v$, $xx + zx + v'$, z est la somme de deux des racines dont v et v' sont les produits.

Je vais éclaircir par des exemples ce qui vient d'être établi.

1er. *Ex.* Soit $X = x^4 * - 25x^2 + 18x + 28 = 0$. L'équation du troisième degré pour déterminer ss est $64s^6 - 800s^4 + 2052ss - 324 = 0$; ou $z^3 - 50z^2 + 513z - 324 = 0$, en faisant $4ss = z$.

Une des valeurs de z dans cette équation est 36; divisant le premier membre par $z-36$, le quotient est $zz-14z+9$; d'où l'on tire $z=7\pm2\sqrt{10}=(\sqrt{5}\pm\sqrt{2})^2$; on a donc; $2s=6$: comme le coefficient de x est positif; on doit prendre $d'>d$; on a, $d'+d=\sqrt{5}+\sqrt{2}$, $d'-d=\sqrt{5}-\sqrt{2}$; $d=\sqrt{2}$; $d'=\sqrt{5}$; les quatre valeurs de x sont $3+\sqrt{2}$, $3-\sqrt{2}$, $-3+\sqrt{5}$, $-3-\sqrt{5}$; X est le produit des deux trinomes $(x-3)^2-2$, $(x+3)^2-5$, ou, $xx-6x+7$, $xx+6x+4$.

2d. *Ex.* Soit $X=x^4 * -21x^2-42x+44=0$; l'équation en z devient $z^3-42z^2+265z-1764=0$; une des valeurs de z dans cette équation est 36; divisant le premier membre par $z-36$, le quotient est $zz-6z+49=0$; les deux autres valeurs de z, sont $3\pm2\sqrt{-10}=(\sqrt{5}\pm\sqrt{-2})^2$. Les valeurs de $4ss$ de $(d+d')^2$ et de $(d-d')^2$ sont 36, $(\sqrt{5}+\sqrt{-2})^2$, $(\sqrt{5}-\sqrt{-2})^2$, les valeurs de $2s$, $d+d'$, et $d-d'$, sont 6, $\sqrt{5}+\sqrt{-2}$, $\sqrt{5}-\sqrt{2}$; de là, $d=\sqrt{5}$, $d'=\sqrt{-2}$; les quatre racines de l'équation proposée, sont $3+\sqrt{5}$, $3-\sqrt{5}$, $-3+\sqrt{-2}$, $-3-\sqrt{-2}$; et $X=((x-3)^2-5)((x+3)^2+2)=(xx-6x+4)(xx+6x+11)$.

3me. *Ex.* Soit $X=x^4 * -5x^2-4x+30=0$; l'équation en z est $z^3-10z^2-95z-16=0$; $z=16$. Divisant par $z-16$, on a pour quotient

$zz+6z+1=0$; $z=-3\pm 2\sqrt{2}.=-(\sqrt{2}\mp 1)^2$. Donc, les valeurs de $(d+d')^2$ et de $(d-d')^2$ sont négatives; donc, les valeurs de $d+d'$ et de $d-d'$ sont imaginaires, et partant, l'équation proposée n'a aucune racine réelle.

§293. Les procédés que j'ai exposés dans le § précédent pour ramener les équations du quatrième degré à celles du troisième, exigent que les premières soient dégagées de leur second terme. On peut aussi opérer cette réduction sans exécuter préliminairement ce dégagement.

Soit $X=x^4-2p'x^3+p''x^2-p'''x+p^{IV}=0$; une équation du quatrième degré. Soit regardé le premier membre comme étant le produit des deux trinomes $xx-(p'+r)x+z+v$; $xx-(p'-r)x+z-v$; r, z, v, étant des quantités cherchées. Dans ce produit, les coefficiens de x^4, x^3, x^2, x^1, x^0, sont respectivement 1, $-2p'$, $p'p'-rr+2z$, $-(2p'z-2vr)$, $zz-vv$; partant on a les trois équations suivantes, pour déterminer les inconnues z, v, r; $rr-2z=p'p'-p''$; $2p'z-2vr=p'''$, $zz-vv=p^{IV}$. Des deux premières de ces équations on obtient,

$$4vv=\frac{(2p'z-p''')^2}{p'p'-p''+2z};\ 4(zz-vv)=4zz-\frac{(2p'z-p''')^2}{p'p'-p''+2z}=4p^{IV};$$

ou $8z^3-4p''z^2+4z(p'p'''-2p^{IV})-(p'''^2-4p^{IV}(p'p'-p''))=0$;

partant, z est déterminée par une équation du troisième degré. On peut aussi obtenir immédiatement les équations qui déterminent r et v, indépendamment de z. Ce procédé porte le nom de *Règle de* BOMBELLI, quoique son véritable auteur soit FERRARI. Il me paroît présenter d'une manière moins lumineuse que les précédens la manière dont les équations du quatrième degré dépendent de celles du troisième, aussi crois-je devoir me contenter de l'exposition que je viens d'en faire; d'autant plus qu'il a été détaillé avec beaucoup de soin par différens Auteurs, et en particulier par CLAIRAUT dans ses Elémens d'Algèbre.

Exer. prop. Trouver quatre nombres en progression géométrique, en connoissant leur somme $4s$, et la somme de leurs cubes $4c$.

Ex. Soit $s=10$; $c=5110$.

Partager les deux nombres donnés a et b l'un et l'autre en deux parties; de manière que le produit p d'une partie de a par une partie de b soit donné; et que la somme ou la différence c des carrés des deux autres parties soit aussi donnée.

Ex. Soit c une somme; $a=10$, $b=12$, $p=20$, $c=85$.
Soit c une différence; $a=16$, $b=12$, $p=35$, $c=32$.

§ 294. Non-seulement la solution générale des équations du quatrième degré participe à la complication des formules des équations du troisième ; mais il s'y joint encore une complication qui lui est propre tirée de la combinaison de ces dernières formules, et de l'extraction des racines carrées à exécuter sur chacune d'elles. Aussi, lorsque les racines des équations du quatrième degré ne sont pas rationnelles, et lorsqu'elles proviennent des racines irrationnelles d'une équation du troisième degré ; il vaut mieux, pour la pratique, recourir aux voies d'approximation. En particulier, l'emploi de ces dernières devient nécessaire lorsque les racines de la réduite du troisième degré sont exprimées d'une manière imaginaire, quoiqu'elles soient réelles. L'ignorance dans laquelle nous sommes encore sur la solution générale des équations des degrés supérieurs au quatrième rend indispensable l'usage des méthodes d'approximation, lorsque ces équations n'ont pas des racines rationnelles. Les fractions continues, appliquées dans le § 290 à la recherche des racines approchées des équations cubiques, fournissent un moyen général d'approximation

pour les racines de toutes les équations. Je vais les appliquer encore à un ou deux exemples.

Partager une somme donnée en deux parties, telles, que la quatrième puissance d'une de ces parties soit égale au produit du cube de l'autre partie par leur somme.

Soit la somme donnée représentée par 2; la première partie sera plus grande que 1; soit cette première partie, $1+\frac{1}{x}$, l'autre sera $1-\frac{1}{x}$; on a l'équation $(1+\frac{1}{x})^4=2(1-\frac{1}{x})^3$; ou,

$$X=x^4 \quad -10x^3 \quad * \quad -6x \quad -1 \quad =0; \qquad x=10+\frac{1}{x'}$$

$$X'=61x'^4-994x'^3-300x'^2-30x'-1=0; \qquad x'-17-\frac{1}{x''}$$

$$X''=124048x''^4-326744x''^3+54780x''^2-3154x''+61=0; x''=2+\frac{1}{x'''}.$$

En faisant $x=10$; le rapport approché des parties cherchées est celui de 11 à 9; en faisant $x=10+\frac{1}{17}$; leur rapport approché est celui de 94 à 77; la différence de 94^4 à $77^3\times171$ n'est pas $\frac{1}{100\,000}$ de l'un de ces produits.

Si on propose la question : trouver deux nombres, tels, que la quatrième puissance du plus petit d'entr'eux est égale au produit du cube du plus grand par leur différence;

on a l'équation, $x^4=(1+x)^5$; laquelle diffère de l'équation $x^4=(1-x)^5$ à laquelle on peut ramener la question précédente, seulement par le signe de x ; on a,

$$X=x^4-x^3-3x^2-3x-1=0;\quad x=3-\frac{1}{x'}.$$

$$X'=17x'^4-60x'^3+42x'^2-11x'+1=0;\quad x'=3-\frac{1}{x''}.$$

$$X''=103x''^4-457x''^3+420x''^2-144x''+17=0;\ x=4-\frac{1}{x'''}.$$

$$X'''=3281x'''^4-7792x'''^3+4824x'''^2-1191x'''+103=0;\ x'''=2+\frac{1}{x^{IV}}.$$

Aut. ex. Trouver deux nombres tels que la quatrième puissance de l'un d'eux soit égale au produit de l'autre par le cube de leur somme; *item*; la quatrième puissance du plus petit doit être égale au produit de l'autre par le cube de leur différence.

APPENDICE,

Relatif à quelques Eclaircissemens géométriques.

LES Mathématiciens modernes, depuis DESCARTES jusqu'à nos jours, se sont occupés avec soin des Applications de l'algèbre à la géométrie, et leurs travaux à cet égard ont beaucoup contribué à l'avancement des sciences mathématiques soit abstraites soit appliquées. Mais ils se sont bien moins occupés de l'application de la géométrie à l'algèbre. Cependant, on peut aussi quelquefois répandre du jour sur les vérités algébriques, et les mettre sous les yeux par le secours de la géométrie. L'appendice que je joins à cet Ouvrage est destiné à donner quelques éclaircissemens tirés de la géométrie, sur les points suivans : sur la règle des signes de la multiplication ; sur la distinction entre les quantités positives et les quantités négatives ; sur l'introduction des signes de l'indétermination et sur celui de l'impossibilité

l'impossibilité représentée par l'infini; sur la doctrine élémentaire des *maxima* et des *minima*, et sur celle des quantités imaginaires qui est intimément liée avec elle; sur la liaison qui règne entre les différens cas auxquels une même question peut donner lieu, et sur la manière dont les uns ou les autres de ces cas sont obtenus, suivant les rapports qui règnent entre les grandeurs des quantités données dans l'énoncé d'une question. Quoiqu'il convienne de joindre ces éclaircissemens à l'enseignement de chacun des objets auxquels ils sont relatifs; j'ai cru devoir les réunir à la fin de cet ouvrage, pour ne pas arrêter ceux des lecteurs qui n'auroient pas les légères connoissances géométriques qu'ils supposent.

Eclaircissement sur le § 26. (fig. Ire).

§ 295. LA règle de la multiplication quant aux signes peut être éclaircie géométriquement, et mise sous les yeux comme il suit.

1°. Le rectangle de la somme de deux lignes par la somme de deux autres est égal à la somme des rectangles de chacune des deux premières lignes par chacune des deux autres.

Soit AB la somme de deux droites AE, EB; et soit AC, la somme de deux droites AF, FC;

soit fait le rectangle ABDC des deux sommes AB, AC; et par E et F soient menées aux côtés de ce rectangle des parallèles qui se rencontrent en G. Le rectangle AD est décomposé dans les quatre rectangles AG, BG, CG, DG, qui sont respectivement les rectangles, $AE \times AF$, $BE \times AF$, $AE \times CF$, $BE \times CF$.

2°. Du rectangle de la somme de deux lignes par la somme de deux autres, soit ôté le rectangle de la différence des deux premières par la différence des deux dernières; j'affirme que le reste est égal au double de la somme des rectangles, de la plus grande des deux premières par la plus petite des deux dernières, et de la plus petite des deux premières par la plus grande des deux dernières.

Soit AE la plus grande des deux premières lignes AE, BE; et soit AF la plus grande des deux autres lignes AF, FC. Soit prise $Ae = BE$; et soit $Af = CF$.

Par e soit menée à AC une parallèle qui rencontre en g et h les droites FG, et CD; et par f soit menée à AB une parallèle qui rencontre en i la droite eh. Le rectangle Gi est le rectangle de la différence Ee des deux premières droites, par la différence Ff des deux dernières; et l'excès du rectangle AD

des deux sommes, sur le rectangle G*i* des deux différences, est la somme des quatre rectangles E*f*, BG, D*g*, C*i*; or, D*g*=E*f*, et BG=C*i*, donc, la différence des deux rectangles des sommes et des différences, est double de la somme des rectangles E*f* et BG, ou AE×CF et BE×AF.

Symboliquement. 1°. $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$

2°. $(a+b)(c+d)-(a-b)(c-d)=2ad+2bc.$

3°. De là, $(a-b)(c-d)=(a+b)(c+d)-2(ad+bc)=ac-ad-bc+bd.$

Cor. En particulier, soient *c* et *d* égales à *a* et *b* respectivement.

$(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$; $(a-b)^2=aa-2ab+bb.$

Eclaircissement sur les §§ 29 et 48 (fig. IIe.)

§ 296. Soit AB une droite donnée de grandeur à prolonger en X de manière que le rapport de AX à BX soit donné.

Construction. Par A et par B soient menées deux droites parallèles entr'elles A*a* et B*b*, qui soient entr'elles dans le rapport donné. Soit menée *ab* qui rencontre AB prolongée en X. Les droites AX et BX sont les droites cherchées.

Rem. 1re. Pour que le problème soit résolu dans le sens propre de l'énoncé, suivant le-

quel $AX > BX$, on doit donner $Aa > Bb$; si on donne $Bb' > Aa$, la droite $b'a$ rencontre AB en X′, de manière que les droites AX et BX, ont changé l'une et l'autre de direction en devenant AX′ et BX′. Ce changement de direction est indiqué en algèbre par le changement de signe. La direction ABX étant regardée comme positive, la direction BAX′ opposée à la première, est appelée négative : on compare entr'elles, ou les deux quantités positives AX et BX; ou les deux quantités négatives AX′ et BX′; mais on ne compare pas l'une de ces lignes positives, avec l'une de ces lignes négatives.

Rem. 2de. Si la droite Bb'' est donnée égale à Aa, la droite ab'' est parallèle à AB; et il n'y a aucun point de rencontre de la droite ab'' avec la droite AB prolongée dans l'une ou dans l'autre des deux directions opposées. Deux quantités dont la différence AB n'est pas nulle, ne peuvent pas être égales entr'elles; l'impossibilité de la question proposée est alors indiquée par le défaut de rencontre des lignes AB, ab'' qui devroient se rencontrer pour que la question fut possible.

Rem. 3me. Plus la ligne Bb approche d'être égale à Aa ou Bb'', plus le point de ren-

contre X est éloigné. Comme la ligne Bb peut différer de Aa ou Bb'' moins que d'aucune quantité assignée, aussi le rapport de Aa à Bb, et celui de AX à BX qui lui est égal, peut approcher du rapport d'égalité plus près que n'en approche aucun rapport assigné de plus petite inégalité; et il en est de même du rapport de Bb à Aa ou de BX' à AX'. Le rapport d'égalité est la limite du rapport de deux quantités dont la différence AB est donnée.

Rem. 4me. Que la droite ab'' parallèle à AB s'approche de AB parallélement à elle-même jusqu'à coïncider avec elle; et qu'en même tems la grandeur de AB diminue (en conservant sa direction) jusqu'à évanouir. Tous les points des lignes ab'' et AB coïncideront et la question sera indéterminée.

Rem. 5me. Soit $AB=d$; $Aa=\alpha$, $Bb=\beta$; et soit $\alpha>\beta$. Par les triangles semblables, $b''ab$, BXb, on a, $bb'':Bb=ab'':BX$; $Bb'':Aa=ab'':AX$; ou, $\alpha-\beta:\beta=d:BX$; $\alpha-\beta:\alpha=d:AX$; $BX=d\times\frac{\beta}{\alpha-\beta}$, $AX=d\times\frac{\alpha}{\alpha-\beta}$; Soit $\alpha<\beta$; on a de même $\beta-\alpha:\beta=d:BX'$; $\beta-\alpha:\alpha=d:AX'$; $BX'=d\times\frac{\beta}{\beta-\alpha}$, $AX'=d\times\frac{\alpha}{\beta-\alpha}$. Le change-

ment de signe du terme $\alpha-\beta$ pour devenir $\beta-\alpha$, indique le changement de direction des droites AX et BX qui deviennent AX′ et BX′. Soit $\beta=\alpha$; AX et BX sont l'une et l'autre impossibles ; à moins qu'on ait en même tems $d=0$.

Eclaircissement sur les §§ 30 et 48, (fig. IIIe).

§ 297. Soient AB, CD, deux droites données de grandeur ; à couper l'une en X et l'autre en Y, de manière que chacun des rapports de AX à CY, et de BX à DY, soit donné.

Que les rapports donnés de AX à CY, et de BX à DY ; soient respectivement égaux aux rapports de AB à deux droites B*b*, A*a*, qui soient menées par B et par A parallèles entr'elles. Soient menées A*b*, et B*a* ; sur *b*B depuis le point *b*, soit portée *b*B′ égale à CD ; et sur A*a* depuis le point A soit prise AA′ aussi égale à CD. Soit menée B′A′ qui rencontre B*a* en Z ; par Z, soit menée à B*b* ou A*a* une parallèle qui rencontre AB en X, et A*b* en V.

La droite ZV, égale à AA′ et *b*B′, sera égale à CD, et les droites AX, BX et XV, XZ, sont respectivement les parties cherchées,

les premières de la droite AB, et les secondes de la droite CD.

Pour que le problème soit possible, dans le sens propre de l'énoncé, suivant lequel AB et CD sont les sommes des parties cherchées; la droite A'B' doit rencontrer la droite B*a*, entre les points B et *a*; ce qui a lieu, lorsque la droite CD tient un milieu entre chacune des droites B*b* et A*a*; ensorte que, elle est plus grande que l'une d'elles et plus petite que l'autre (fig. IIIe. 1°.).

Lorsque les droites A*a* et B*b* sont égales entr'elles, et l'une et l'autre égales à CD; la ligne B'A' convient avec la ligne B*a*; tous les points de ces deux lignes sont des points de rencontre, le problème est alors indéterminé (fig. III. 2°.).

Les droites B*b* et A*a* étant égales entr'elles, mais inégales à CD, la droite B'A' est parallèle à B*a*; il n'y a aucun point de rencontre Z des droites B*a*, B'A', et le problème est impossible (fig. III. 3°.).

Que les lignes B*b* et A*a* soient inégales entre elles, et que la ligne CD soit plus grande que chacune d'elles; si $BB' < aA'$ ou $Bb > Aa$; la ligne A'B' rencontre *a*B prolongée de *a* en B; le point X est situé sur le prolonge-

ment de AB prolongée de A en B, de manière que AB est la différence de AX et de BX; et aussi, VZ est la différence de VX et de ZX, ou, CD est l'excès de CY sur DY (fig. III. 4°.). Au contraire, si BB'$>$$a$A', et partant, B$b$$<Aa$, le point X est situé sur BA prolongée de B en A, de manière que AB est l'excès de BX sur AX, et aussi CD est l'excès de DY sur CY.

Il en est de même si CD est plus petite qee chacune des droites Aa, Bb.

Puisque la nature de la réponse à la question proposée dépend de la grandeur de la ligne CD relativement aux lignes Aa, Bb; elle est déterminée par les quantités données dans la question, et elle n'est pas au choix de celui qui s'en occupe.

Dans ces différentes réponses, les quantités que l'on compare entr'elles conservent l'une et l'autre les directions suivant lesquelles on les regardoit comme positives; ou changent l'une et l'autre ces directions; de manière qu'on compare entr'elles deux quantités positives ou deux quantités négatives, mais qu'on ne compare pas une des premières avec une des dernières.

Il est aisé d'appliquer le calcul à la cons-

truction précédente, et de rèduire la question proposée à l'une ou à l'autre des deux suivantes. Trouver deux droites dont on connoît la somme ou la différence, et le rapport. En effet, à cause des parallèles,
$A'a$:BB'=A'Z:B'Z=AX:BX.

Eclaircissement sur le § 87, (fig. IVe.)

§ 298. Soit AB une droite donnée de grandeur à couper en X, de manière que le rectangle AX×BX, soit égal au carré d'une droite L donnée de grandeur.

On sait (par les Elémens de géométrie) que si d'un point quelconque de la circonférence d'un demi-cercle on abaisse sur son diamètre une perpendiculaire, le carré de cette perpendiculaire est égal au rectangle des parties du diamètre. De là, découle la construction suivante du problème proposé.

Sur AB comme diamètre soit décrit un demi-cercle, d'un point quelconque de AB, par exemple, de son milieu C, soit élevée à AB une perpendiculaire CD égale à L; par le sommet D de cette perpendiculaire soit menée à AB une parallèle qui rencontre (s'il est possible) en Y la circonférence du demi-cercle; et de Y soit abaissée sur AB une per-

pendiculaire YX, le point X est le point de section cherché.

Pour que le problème soit possible, la parallèle menée par D doit rencontrer la circonférence du demi-cercle, pour cela, la droite CD ou L, ne doit pas être plus grande que le rayon CA; de manière que sa plus grande valeur est le rayon CA. Lorsque CD ou L est plus petite que le rayon, ou lorsque le point D est en dedans du demi-cercle, la parallèle menée par D rencontre la circonférence en deux points Y et Y′ auxquels répondent deux points X et X′, semblablement placés de part et d'autre du milieu C; de manière que les droites AX et BX d'une des divisions, sont respectivement égales aux droites BX′ et AX′ de l'autre division.

Lorsque le point D est sur la circonférence, la parallèle à AB menée par D, touche la circonférence, et la solution est unique; les points X et X′ se réunissent en C.

Lorsque D est hors de la circonférencce ou lorsque L est plns grande que la moitié de AB, la parallèle à AB menée par D ne rencontre pas la circonférence, tant les points Y que les points X n'existent pas, et le problème est impossible.

L'impossibilité qui est indiquée algébrique-

ment par l'introduction du signe $\sqrt{-1}$, est donc indiquée géométriquement par le défaut de rencontre des lignes que requiert la construction.

L'idée de non-rencontre de la parallèle au diamètre menée par D et de la circonférence décrite sur le diamètre AB, est une idée unique ; et on ne peut pas dire que cette non-rencontre est plus ou moins grande suivant que CD est plus ou moins grande. Ce qui s'accorde avec l'unité de signe de l'impossibilité réduite à $\sqrt{-1}$.

L'application du calcul à la construction suppose la rencontre de la parallèle menée par D avec la circonférence : cette application est fondée sur l'existence du triangle CYX rectangle en X, dans lequel on connoît l'hypothénuse $CY=CA=a$; une des jambes de l'angle droit $XY=l$; et dans lequel on détermine l'autre jambe de l'angle droit CX par l'équation $CX^2=CY^2-XY^2=aa-ll$; d'où l'on tire $CX=\sqrt{(aa-ll)}$ Quoique le fondement de cette application n'existe plus lorsque $aa<ll$; on a conservé comme symbole (et si je puis parler ainsi, par une espèce de métaphore); le résultat de cette application, lors même qu'elle ne peut plus avoir lieu. L'algè-

bre apprend l'exension donnée aux formules au-delà des cas d'où elles sont tirées par l'introduction du signe $\sqrt{-1}$.

Scholie. Je crois devoir faire remarquer, que la géométrie indique d'une manière unique les deux genres d'impossibilité répondans aux deux signes $\frac{A}{0}$ et $\sqrt{-1}$; savoir, l'un et l'autre par le défaut de rencontre des lignes qui doivent se rencontrer pour que la question soit résolue.

Rem. $\frac{1}{2}AB \overline{\geqslant} XY$; $\left(\frac{AX+BX}{2}\right)^2 \overline{\geqslant} AX \times BX$: ou la moyenne arithmétique entre deux quantités inégales est plus grande que la moyenne géométrique entre ces quantités (v. § 46).

Eclaircissement sur le § 88, (fig. V^e.).

§ 299. *Prob.* Soit AB une droite donnée de grandeur. On demande de la couper en X de manière que la somme des carrés des deux parties AX et BX soit égale au carré d'une droite L donnée de grandeur.

Parmi les différentes manières de résoudre cette question géométriquement, je prendrai la suivante.

D'un point quelconque de la droite AB, par exemple, de son extrémité A, soit élevée

à AB une perpendiculaire Aa égale à AB; et soit menée la droite indéfinie Ba. Du point A comme centre avec le rayon L soit décrit un cercle, qui rencontre (s'il est possible) la droite Ba en Y; du point Y soit abaissée sur AB la perpendiculaire YX; les droites AX et BX sont les droites cherchées.

Comme la droite AD, perpendiculaire à Ba, est la plus petite des droites menées de A à quelque point de la droite indéfinie Ba; pour que le problème soit possible, la droite L ne doit pas être donnée plus petite que AD; soit $AB = 2AC = 2a$, $AD^2 = 2aa$; $l^2 \geqq 2aa$. Tant que le point Y existe, $DY^2 = ll - 2aa$. mais $DY^2 = 2CX^2$; donc, $2CX^2 = ll - 2aa$; et $CX = \sqrt{(\frac{1}{2}ll - aa)}$. Lorsque $ll > 2aa$, il y a deux points Y, et deux points X semblablement placés relativement aux points A et B.

Pour que le problème soit résolu dans le sens propre de l'énoncé, suivant lequel AB est la somme des droites cherchées; le point Y doit être situé entre B et D, et alors le point X est situé entre A et B; ou ce qui revient au même, la droite l ne doit pas être donnée plus grande que AB. Si la droite l est donnée plus grande que AB, le point de section y est situé sur DB prolongée dans la direction DB, et le

point x correspondant est situé sur le prolongement de AB. La droite Bx a changé de direction relativement à la direction de BX; la droite AB est la différence de Ax et de Bx au lieu d'être la somme de AX et de BX; et algébriquement parlant, elle est dite être la somme de Ax et de —Bx. On obtient de même le point x' situé sur le prolongement de AB dans la direction BAx' ; auquel répond la différence AB=Bx'—Ax'.

Les deux questions dans l'une desquelles AB est la somme des deux parties cherchées, et dans l'autre AB est la différence des deux droites cherchées, sont liées entr'elles d'une manière si intime, que, si elles sont possibles, on obtient la solution de l'une des deux, suivant la grandeur donnée de la somme des carrés; et la réponse à l'une ou à l'autre de ces questions ne dépend pas de celui qui les résout, mais elle est déterminée par les relations qu'ont entr'elles les conditions énoncées.

Dans cet exemple, les deux solutions (si elles sont possibles) sont relatives l'une et l'autre à des quantités positives, ou l'une et l'autre à des quantités négatives. En changeant un peu la nature des conditions, l'une des solutions peut être relative à des quantités po-

sitives, et l'autre à des quantités négatives.

Au lieu de demander que la somme des carrés de AX et de BX soit donnée de grandeur; qu'on demande que le carré de AX, joint au carré d'une droite qui a un rapport donné à BX soit donné de grandeur. Au lieu d'élever la perpendiculaire A*a* égale à AB, soit élevée cette perpendiculaire égale à la droite dont le rapport à AB est égal au rapport donné; et soit menée l'indéfinie B*a* (fig. V^e, 2°). Si la droite *l* tient un milieu entre les droites AB et A*a*, les deux solutions, si elles sont possibles, sont l'une et l'autre positives, de manière que AB est la somme, dans le sens propre, des parties cherchées. Si la droite *l* est plus grande que la plus petite des droites AB, et A*a*, mais plus petite que la plus grande d'entr'elles, une des deux solutions est positive et l'autre est négative. Si la droite *l* est plus grande que chacune des droites AB et A*a* (fig. V 3°) les deux solutions sont l'une et l'autre négatives; de manière que pour chacune de ces solutions la droite AB est une différence; et d'après les données, celui qui résout la question n'a pas le choix de la nature des solutions.

Dans le cas où *l* tient un milieu entre AB et A*a*, sa plus petite valeur est la perpendiculaire

AD abaissée de A sur Ba; et cette plus petite valeur se détermine par l'équation,

$$BA \times Aa = Ba \times AD\text{; ou } AD = \frac{BA \times Aa}{\sqrt{(BA^2 + Aa^2)}}.$$

Eclaircissement sur le § 92 (fig. VIIe).

§ 300. On peut éclaircir géométriquement ce qui a été développé dans ce §, que le rapport de deux quantités est connu quand on connoît le rapport de leur produit à la différence de leurs carrés.

Soit AXB un triangle rectangle en X, du sommet X soit abaissée sur l'hypothénuse AB une perpendiculaire XY; et soit l'hypothénuse coupée en deux parties égales au point C. On a les deux équations, $BX^2 - AX^2 = 2\,AB \times CY$; et $AX \times XB = AB \times XY$. Partant, en admettant les symboles du texte, $CY : XY = q : p$; $CY^2 : XY^2 = qq : pp$; $CY^2 + XY^2 : CY^2 = qq + pp : qq$; de là, $CA : CY = \sqrt{(qq+pp)} : q$, et
$BY : AY = \sqrt{(qq+pp)} + q : \sqrt{(qq+pp)} - q$;
$= (\sqrt{(qq+pp)} + q)^2 : pp = pp : (\sqrt{(qq+pp)} - q)^2$.
Mais, $BY : AY = BX^2 : AX^2$; donc,
$BX : AX = \sqrt{(qq+pp)} + q : p = p : \sqrt{(qq+pp)} - q$.

Eclaircissement sur le § 103, (fig. VIe).

§ 301. Soient AB, et CD, deux droites données

nées de grandeur : on demande de les prolonger, la première en X et la seconde en Y, dans les directions ABX, CDY, de manière que le rapport de AX à CY soit égal à un rapport donné, et que le rectangle BX×DY soit donné de grandeur.

Que le rapport donné de AX à CY soit égal au rapport de AB à une droite B*b*, laquelle soit menée depuis le point B faisant un angle quelconque avec AB : soit menée A*b*. Sur la droite B*b* soit portée depuis le point *b* une droite *b*E égale à CD ; et par E soit menée à A*b* une parallèle, qui rencontre AB en F. Qu'une droite menée par X parallèlement à B*b* rencontre A*b* en V, et EF en Z. Les droites VZ, ZX, VX, seront respectivement égales aux droites CD, DY, CY.

Les triangles AB*b*, FXZ, étant semblables; B*b*:AB=ZX:FX=ZX×BX:FX×BX. Soit le rectangle donné ZX×BX ou DY×BX égal au rectangle de B*b* par une droite donnée L ; on a B*b*:AB=B*b*×L:FX×BX=B*b*×L:AB×L; et partant, FX×BX=AB×L. Donc, la question est réduite à trouver deux droites FX, BX, dont on connoît la différence BF et le rectangle AB×L.

Un des points de prolongement X répond

à la question dans le sens propre de l'énoncé.

1°. Soit L<FB, l'autre point X' est entre A et B, et le point Y' correspondant est aussi entre C et D, de manière que les droites AB, CD, sont respectivement les sommes des droites AX', BX', et CY', DY'; les droites BX' et DY' ayant l'une et l'autre changé de direction et partant aussi de signe.

2°. Soit L>FB, l'autre point X' est situé sur AB prolongée dans la direction BA : et le point Y' est situé sur CD prolongée de D en C. Les droites AB, CD, sont respectivement les excès des droites BX' et DY', sur les droites AX' et CY'. Les droites AX' et CY', ont l'une et l'autre des directions opposées à celles suivant lesquelles on les considéroit originairement, ce changement de direction est indiqué algébriquement par le changement du signe de l'une et de l'autre ; et comme elles ont changé ensemble de direction ou de signe, leur rapport ne change pas : de même les lignes BX', et DY', ont l'une et l'autre changé de direction et de signe, mais leur rectangle conserve son signe.

Au cas originairement proposé, se joignent deux autres cas nécessairement liés avec lui de manière qu'on ne peut pas regarder la solu-

tion comme complète en ayant égard au premier cas seulement. Et l'obtention de l'un ou de l'autre de ces derniers cas est déterminée par les connoissances données dans la question, et ne dépend pas de celui qui la résout.

Rem. On auroit pu distinguer trois cas, suivant que CD est égale à Bb, plus grande qu'elle ou plus petite qu'elle : mais, le procédé de la solution étant sensiblement le même pour chacun d'eux : cette distinction est superflue.

Eclaircissement sur le § 104, (fig. VIII[e]).

§ 302. Je vais montrer par l'exemple du problème de ce §, comment on peut, par des considérations géométriques, ramener une question composée à quelque question beaucoup plus simple : en ramenant immédiatement le problème proposé à celui du § 87.

Soient AB, CD, deux droites données de grandeur à couper la première en X et la seconde en Y, de manière que chacun des rectangles $AX \times CY$ et $BX \times DY$ soit donné de grandeur. Soit $AX \times CY = AB \times CC'$, et soit portée CC′ sur CD depuis le point C; puisqu'on demande que le point X soit entre A et B, ou que $AB > AX$, on doit avoir $CY > CC'$, de l'équation $AX \times CY = AB \times CC'$, on tire la proportion $AX : AB = CC' : CY$; et de là,

$BX:AB=C'Y:CY$. Soit aussi $BX \times DY = AB \times DD'$; ou $BX:AB=DD':DY$; on aura $C'Y:CY=DD':DY$; et de là, $C'Y:CC'=DD':D'Y$; partant, on connoît la somme CD' et le rectangle $CC' \times DD'$ des droites $C'Y$ et $D'Y$; donc, ces droites sont l'une et l'autre connues.

Pour que le problème soit possible, on doit avoir, $C'D'^2 \geqq 4CC' \times DD'$; donc, $C'D' \geqq 2\sqrt{CC' \times DD'}$; ou, $CD-(CC'+DD') \geqq 2\sqrt{CC' \times DD'}$; $CD \geqq CC'+DD'+2\sqrt{CC' \times DD'} \geqq (\sqrt{CC'}+\sqrt{DD'})^2$; et $\sqrt{CD} \geqq \sqrt{CC'}+\sqrt{DD'}$; ce qui est conforme au § 104; en effet, en appelant $AB=a$, $CD=b$; $AB \times CC'=p$, $AB \times DD'=p'$; les quantités CD, CC', DD', sont entr'elles comme les quantités ab, p, p'; et comme $\sqrt{ab} > \sqrt{p}+\sqrt{p'}$, aussi $\sqrt{CD} > \sqrt{CC'}+\sqrt{DD'}$.

2°. Que les droites AB et CD soient respectivement les excès des droites AX et CY sur les droites BX et DY.

La droite CC' devra être plus grande que chacune des droites CD et CY : de la proportion $AX:AB=CC':CY$; on tire, $AX-AB:AB=CC'-CY:CY$; ou, $BX:AB=C'Y:CY.=DD':DY$; de là, $C'Y:C'Y+CY=DD':DD'+DY$, ou, $C'Y:CC'=DD':D'Y$. Donc encore, on connoît la somme $C'D'$ et le rectangle $CC' \times DD'$

des droites $C'Y$, $D'Y$. On a de même, $C'D'^2 \geqq 4CC' \times DD'$; $C'D' \geqq 2\sqrt{CC' \times DD'}$. Or, $C'D' = CC' + DD' - CD$; donc,

$CD \leqq CC' - 2\sqrt{CC' \times DD'} + DD'$,

$\sqrt{CD} \leqq \sqrt{CC'} - \sqrt{DD'}$, ou $\sqrt{CC'} \geqq \sqrt{CD} + \sqrt{DD'}$.

Si l'ordre des points doit être XAB, YCD; on montre de même que $\sqrt{DD'} \geqq \sqrt{CC'} + \sqrt{CD}$.

Je vais montrer par un exemple, tiré de l'exercice proposé p. 323, comment on peut ramener des questions compliquées à des questions plus simples déjà résolues.

Soient AB, CD, EF, trois droites données de grandeur : on demande de les couper en X, Y, Z, de manière que chacun des rectangles $AX \times CY$, $BX \times EZ$, $DY \times FZ$, soit donné de grandeur. Soit $AX \times CY = AB \times CC'$; et soit CC' portée sur CD; on aura $AB : AX = CY : CC'$; et de là, $AB : BX = CY : C'Y$. Soit $BX \times EZ = AB \times EE'$, et soit portée EE' sur EF; on aura $AB : BX = EZ : EE'$; et partant, $CY : C'Y = EZ : EE'$; donc, $CY - C'Y : C'Y = EZ - EE' : EE'$, ou, $CC' : C'Y = E'Z : EE'$; partant, la question proposée sur trois droites AB, CD, EF, est ramenée à la question correspondante déjà résolue sur deux droites seulement.

On ramène de même successivement la ques-

tion proposée sur un certain nombre de droites, à la question correspondante sur un nombre de droites inférieur d'une unité.

Eclaircissement sur le § 106, (fig. IXe).

§ 303. On peut éclaircir géométriquement la double solution à laquelle conduit la question résolue dans ce §.

Soit AB une droite proposée à couper en X de manière que le carré de AX soit égal au rectangle de BX par une droite donnée AC, laquelle soit portée depuis le point A sur le prolongement de BA. Puisqu'on doit avoir $AX^2 = BX \times AC$; $AX : BX = AC : AX$; de là, $AX : AX + BX = AC : AC + AX$; ou, $AX : AB = AC : CX$; donc, on connoît la différence AC, et le rectangle des droites AX et CX; donc, elles sont l'une et l'autre connues.

La droite AC peut être prolongée de part et d'autre, en X et en X', de manière que chacun des rectangles $AX \times CX$, $AX' \times CX'$, est égal au rectangle donné $AB \times AC$. La seconde solution donne le point cherché dans l'ordre X'AB; alors, la droite AB est la différence des droites BX' et AX'. La droite BX' a conservé la direction suivant laquelle elle étoit regardée comme positive. La droite AX'

a changé la direction suivant laquelle elle étoit regardée comme positive, ou son signe, mais son carré a conservé son signe; et partant, ce carré et ce rectangle conservent leurs signes.

Puisque $AX \times BX = AB \times AC$, et que $BX > AC$, $AB > AX$; donc, le point X est entre A et B; et à cet égard le problème est résolu dans le sens propre de l'énoncé.

Eclaircissement sur le § 108, (fig. X^e).

Le problème développé dans ce §, envisagé sous un point de vue géométrique, peut s'énoncer comme il suit : Trois points étant donnés sur une même droite; trouver sur cette droite un quatrième point, tel, que le rectangle de ses distances à denx des premiers points, soit au carré de sa distance au troisième de ces points, dans un rapport donné.

Soient les deux premiers points donnés désignés par A et A'; soit le troisième des points donnés désigné par B. Comme les points A et A' jouent le même rôle dans la question poposée, ces trois points donnent lieu seulement à deux positions différentes AA'B, ABA'. Que le point cherché soit désigné par X. A la position AA'B répondent les quatres positions différentes, XAA'B, AXA'B, AA'XB, AA'BX.

A la position ABA′ répondent les deux positions différentes, XABA′, AXBA′. Il paroît donc que la question proposée donne lieu à six cas. Dans ces éclaircissemens sur un ouvrage algébrique, je ne crois pas devoir détailler chacun d'eux; mais, je vais seulement traiter l'un d'entr'eux, tel que le premier, dans le but de mettre sous les yeux la liaison qui règne entre quelques-uns de ces cas, et la manière dont les relations qu'ont entr'elles les quantités données déterminent l'obtention de l'un ou de l'autre de ces cas. Soit XAA′B la position du point cherché et des points donnés. Sur AA′ comme diamètre, soit décrit un cercle, dont C soit le centre. Du point X soit conçue menée à ce cercle une tangente qui rencontre en D la perpendiculaire à AB menée depuis le point B; et soit mené le rayon CT. On a $AX \times XA' = XT^2$. Les triangles CXT, DXB étant équiangles, on a la proportion, $XT^2 : BX^2 = CT^2 : BD^2$; et partant, le rapport de CT^2 à BD^2 est égal au rapport donné. De là, découle la construction suivante.

Sur AA′ comme diamètre soit décrit un cercle, dont C soit le centre. Soit changé le rapport donné du rectangle $AX \times XA'$ au carré de BX dans celui de CA^2 au carré d'une droite

BD laquelle soit portée sur une perpendiculaire élevée à AB depuis le point B. Du point D, soit menée au cercle décrit sur AA′ une tangente DT qui rencontre AA′ en X. Le point X est le point cherché.

Rem. 1re. Du point D, on peut mener au cercle ATA′, deux tangentes; dont l'une DT′ rencontre toujours AB entre A′ et B, et donne la position AA′XB.

1°. Soit BD>AC; l'autre tangente rencontre AA′ prolongée, dans la direction BA′A, et donne la position XAA′B (fig. X^e^. 1°).

2°. Soit BD<AC; l'autre tangente rencontre AA′ prolongée dans la direction AA′B, et donne la position AA′BX (fig. X^e^. 2°).

3°. Soit BD=AC; la seconde tangente est parallèle à AA′, et partant, ne la rencontre pas (fig. X^e^. 3°). La seconde solution est alors impossible; ou le rectangle AX×XA′ et le carré de BX ne peuvent jamais être égaux entr'eux dans les deux positions XAA′B, AA′BX. En effet, dans la position XAA′B, la droite BX est plus grande que chacune des droites AX, A′X, et partant, son carré est plus grand que leur rectangle; et dans la position AA′BX, la droite BX est plus petite que chacune des droites AX, A′X, et par-

tant, son carré est plus petit que leur rectangle. Donc, dans ces deux positions, ces deux espaces sont inégaux, mais le rapport d'égalité est la limite de leur rapport.

Rem. 2[d]. La position AA′XB est donc liée avec chacune des positions XAA′B, AA′BX, de manière que la première est toujours obtenue; et qu'on obtient conjointement avec elle l'une des deux autres positions, ou aucune d'elles; suivant que BD est plus grande que AC, plus petite qu'elle, ou égale à elle; la réponse à la question est déterminée par les connoissances données dans les conditions, et ne depend pas du choix de celui qui la résout.

Rem. 3[me]. Dans les deux positions AA′XB, XAA′B les droites AX, A′X, ont des directions opposées ou des signes opposés, mais leur rectangle conserve son signe. Dans les positions AA′XB, AA′BX, la droite BX a des directions ou des signes opposés, mais son carré conserve son signe. Enfin, dans les positions XAA′B, AA′BX, les droites AX, A′X, ont des directions ou des signes opposés, de même que la droite BX. Dans tous ces cas, les quantités dont la comparaison est requise dans la question, conservent leur signe.

Soit AB$=a$, A′B$=a'$, BX$=x$. Les po-

sitions AA'XB, XAA'B, AA'BX, répondent respectivement aux produits $(a-x)(a'-x)$; $(x-a)(x-a')$, $(a+x)(a'+x)$; l'origine du second de ces produits diffère de celle du premier, par les signes de leurs facteurs; et le troisième de ces produits diffère du premier par le signe de x.

Eclaircissemens sur le § 285.

J'ai dit (§ 285), que le cas irréductible du troisième degré, offre un exemple de l'avantage que la géométrie a quelquefois sur le calcul; et que sa solution dépend de la trisection d'un arc ou d'un angle connu : je vais développer cette assertion.

Je prends pour connues les définitions du sinus et du cosinus d'un arc; et je demande qu'on admette les propositions suivantes de trigonométrie, relatives au sinus et au cosinus de la somme de deux arcs, et à leurs conséquences (1).

$\text{Sin.}(a+b)=\text{sin.}\,a\,\text{cos.}\,b+\text{cos.}\,a\,\text{sin.}\,b$; $\text{sin.}\,2a=2\text{sin.}\,a\,\text{cos.}\,a$

$\text{Cos.}(a+b)=\text{cos.}\,a\,\text{cos.}\,b-\text{sin.}\,a\,\text{sin.}\,b$; $\text{cos.}\,2a=\text{cos.}^2a-\text{sin.}^2a$

$\text{Sin.}\,3a=3\,\text{sin.}\,a-4\,\text{sin.}^3\,a$, ou $\text{cos.}\,3a=4\text{cos.}^3a-3\text{cos.}\,a$

$4\,\text{sin.}^3a-3\text{sin.}\,a+\text{sin.}\,3a=0$; $4\,\text{cos.}^3a-3\,\text{cos.}\,a-\text{cos.}\,3a=0$.

---

(1) La manière la plus lumineuse de démontrer ces deux formules géométriqnement me paroît être celle par laquelle on les tire de la proposition suivante démontrée dans tous les élémens. Dans un quadrilatère inscrit au cercle, le rectangle des diagonales est égal à la somme des rectangles des côtés opposés.

Ces deux dernières équations étant comparées avec les équations $4s^3 - 3ps \pm q = o$; on voit qu'elles sont conformes à celles qui peuvent donner lieu au cas irréductible : je dis qu'elles appartiennent nécessairement à ce cas. En effet, la plus grande valeur du sinus ou du cosinus de $3a$ est d'être égale au rayon ; et partant, la plus grande valeur de leurs carrés est aussi l'unité.

Dans l'équation $4s^3 * - 3ps - q = o$; soit fait $s = r\cos. a$; on aura : $4r^3\cos.^3 a - 3pr\cos. a - q = o$; ou $4\cos.^3 a - 3\frac{p}{rr}\cos. a - \frac{q}{r^3} = o$. Soient les termes de cette équation comparés un à un aux termes correspondans de l'équation,

$4\cos.^3 a - 3\cos. a - \cos. 3a = o$; on aura, $\frac{p}{rr} = 1$;

$\frac{q}{r^3} = \cos. 3a$: partant, $rr = p$; $r = \sqrt{p}$;

$\cos. 3a = \frac{q}{p\sqrt{p}}$; on obtient donc la valeur de $\cos. 3a$ dans les termes de l'équation, et aussi la valeur de $s = r\cos. a = \sqrt{p}\cos. a$.

Item, dans l'équation $4s^3 * - 3ps + q = o$; soit fait $s = r\sin. a$; on obtient, $4r^3\sin.^3 a - 3pr\sin. a + q = o$; ou $4\sin.^3 a - 3\frac{p}{rr}\sin. a + \frac{q}{r^3} = o$; cette équation

comparée avec l'équat. $4\sin.^3 a - 3\sin.a + \sin.3a = 0$;

donne $\frac{p}{rr} = 1$, ou $r = \sqrt{p}$; et $\sin.3a = \frac{q}{r^3} = \frac{q}{p\sqrt{p}}$;

partant, on obtient dans les termes de l'équation la valeur de $\sin.3a$, et celle de r; et partant aussi celle de $s = r\sin.a = \sqrt{p} \times \sin.a$.

Cette solution paroît d'abord présenter seulement une des racines de chacune des deux équations proposées : je vais montrer comment on trouve chacune des deux autres.

1°. Soit l'équation $4x^3 * - 3x - \cos.3a = 0$, dans laquelle la valeur trouvée de x est $\cos.a$. Soit divisé le premier membre par $x - \cos.a$, on a pour quotient $4xx + 4x\cos.a - (3 - 4\cos.^2 a)$, en observant que $\cos.3a = \cos.a(4\cos.a - 3)$. Soient cherchées les racines de l'équation, $4xx + 4x\cos.a - (3 - 4\cos.^2 a) = 0$; on trouve $x = -\frac{1}{2}\cos.a \pm \frac{1}{2}\sin.a\sqrt{3}$. Or, $\frac{1}{2}$ est le sinus de 30°, ou le cosinus de 60°; et partant, $-\frac{1}{2}$ est le cosinus de 120°; et $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ en est le sinus; partant, $x = \cos.120°.\cos.a \pm \sin.120°.\sin.a = \cos.120° \mp a$. Partant, outre l'arc a, on obtient chacun des arcs $120° \pm a$. En effet, les trois arcs, $3a$, $360° + 3a$, $360° - 3a$, ont le même cosinus, soit quant à la grandeur, soit quant au signe; et partant, les racines de l'équation proposée doivent être les cosinus du tiers de chacun d'eux.

On a donc, $4x^3 * - 3x - \cos. 3a =$
$4(x - \cos. a)(x - \cos. 120^\circ + a)(x - \cos. 120^\circ - a)$.

2°. Soit l'équation $4x^3 * - 3x + \sin. 3a = 0$; dans laquelle une des valeurs de x est $\sin. a$. Soit divisé le premier membre de cette équation par $x - \sin. a$, on obtient pour quotient
$4xx + 4x \sin. a - (3 - 4\sin.^2 a) =$
$(2x + \sin. a)^2 - 3\cos.^2 a = 0$; de là,
$x = -\frac{1}{2}\sin. a \pm \frac{1}{2}\cos. a\sqrt{3} = \cos. 120^\circ \sin. a \pm \sin. 120^\circ \cos. a$.
Partant, les deux autres valeurs de x sont, $\sin.(120^\circ + a)$ et $-\sin.(120^\circ - a)$. Les triples de ces derniers arcs sont $360^\circ + 3a$, et $360^\circ - 3a$. Le sinus de $360^\circ + 3a$ est le même que le sinus de $3a$, soit quant à la grandeur, soit quant au signe; et le sinus de $360^\circ - 3a$ est le même que le sinus de $3a$ quant à la grandeur, mais il en diffère par le signe.

On a donc, $4x^2 * - 3x + \sin. 3a =$
$4(x - \sin. a)(x - \sin. 120^\circ + a)(x + \sin. 120^\circ - a)$.

Je vais éclaircir ce qui précède par quelques exemples.

1er. *Ex.* Soit l'équation $x^3 * - 6x - 4 = 0$, ou $4x^3 * - 24x - 16 = 0$. $p = 8$, $q = 16$, $qq = 256$, $p^3 = 512$; $\frac{qq}{p^3} = \frac{1}{2}$; $\cos. 3a = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $3a = 45^\circ$, $a = 15^\circ, 105^\circ, 135^\circ$.

$$\text{Cos.}a = \text{cos.}15^\circ,\quad \text{cos.}105^\circ,\quad \text{cos.}135^\circ;$$
$$= \text{cos.}15^\circ,\ -\text{cos. }75^\circ,\ -\text{cos. }45^\circ;$$
$$= \text{cos.}15^\circ,\ -\text{sin. }15^\circ,\ -\text{sin. }45^\circ.$$

Soit $\text{cos.}a = -\text{sin.}45^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}}$; $x = -2\sqrt{2} \times \text{cos.}a = -2$.

$x^3 = -8$; $-6x = +12$, $-4 = -4$;

Puisque $2\text{cos.}^2 15^\circ = 1 + \text{cos.}30^\circ = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$;

$\frac{2+\sqrt{3}}{2} = \frac{4+2\sqrt{3}}{4}$; $\text{cos.}15^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$; $x = \sqrt{3}+1$;

$2\text{sin.}^2 15^\circ = 1 - \text{cos.}30^\circ = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{2} = \frac{4-2\sqrt{3}}{4}$;

$\text{sin.}15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ $x = \sqrt{3}-1$: partant, les trois valeurs de x dans l'équation $x^3 * -6x - 4 = 0$, sont, $\sqrt{3}+1$, $\sqrt{3}-1$, -2, ou,

$x^3 * -6x - 4 = (x - (\sqrt{3}+1))(x + (\sqrt{3}-1))(x+2)$.

2[d]. *Ex.* Soit l'équation $x^3 * -6x + 4 = 0$; ou, $4x^3 * -24x + 16 = 0$. $\text{sin. }3a = \frac{256}{512} = \frac{1}{2}$; $3a = 45^\circ$.

$$\text{Sin.}a = \text{sin.}15^\circ,\ \text{sin.}135^\circ,\ -\text{sin.}105^\circ.$$
$$= \text{sin.}15^\circ,\ \text{sin. }45^\circ,\ -\text{sin. }75^\circ.$$
$$= \text{sin.}15^\circ,\ \text{sin. }45^\circ,\ -\text{cos. }15^\circ.$$

Or, $\text{sin.}45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\text{sin.}15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$, $\text{cos.}15^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$.

$x = 2\sqrt{2}\,\text{sin.}a = 2$, $\sqrt{3}-1$, $-(\sqrt{3}+1)$.

$x^3 - 6x + 4 = (x-2)(x-(\sqrt{3}-1))(x+(\sqrt{3}+1))$.

3[me]. *Ex.* Soit $x^3 * -12x - 12 = 0$.

ou, $4x^3 \quad -48x - 48 = 0$.

$p=16$, $q=48$; $\frac{qq}{p^3}=\frac{9}{16}$; cos. $3a=\frac{3}{4}=0,75$;
$3a=41°24'35''$.

$a=$ 13° 48′ 12″, 133° 48′ 12″; 106° 11′ 48″.
Cos.a=cos.13°48′ 12″, -cos.46° 11′ 48″, -cos.73°48′ 12″
=cos.13° 48′ 12″, -sin.43° 48′ 12″, -sin.16° 11′ 48″
=0,9711206, —0,6921852, —0,2789353
x=4cos.a=3,8844824, -2,7687408, —1,1157412.

4ᵉ. *Ex.* Soit $x^3 * -12x+12=0$, ou $4x^3 * -48x+48=0$.
Sin.$3a=\frac{3}{4}=0,75$; $3a=48°\,35'\,25''$; $a=16°\,11'\,48''$.
Sin.a=sin.16° 11′ 48″; sin.136° 11′ 48″; -sin.103° 48′ 12″
=sin.16° 11′ 48″; sin. 43° 48′ 12″; -sin. 76° 11′ 48″
=0,2789353; 0,6921852, —0,9711204.
x=4sin.a=1,1157412, 2,7687408, —3,8844816.

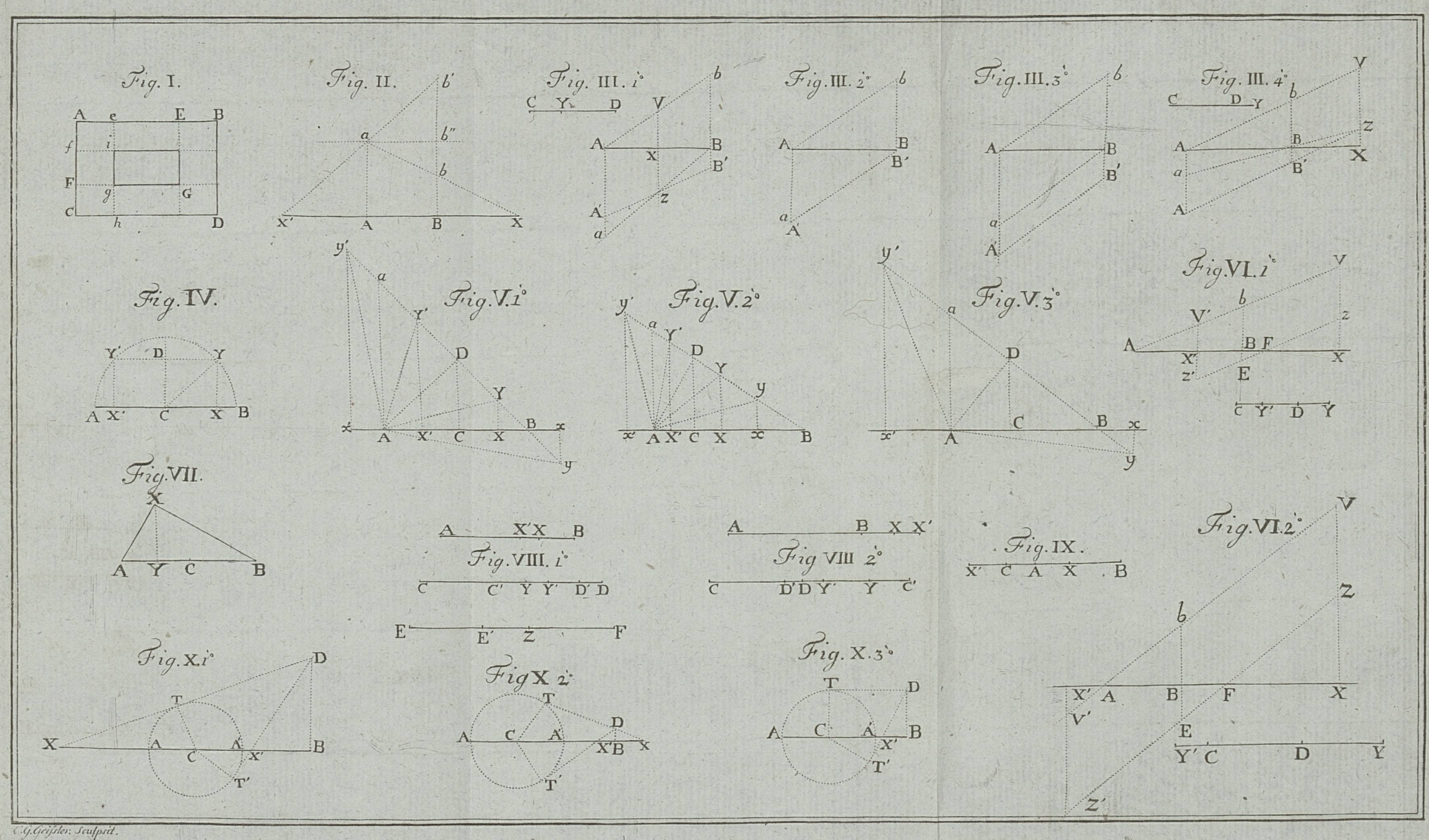
On peut aussi traiter par la trigonométrie les équations du 3ᵐᵉ. degré de chacune des autres formes : mais comme le cas irréductible est le seul qui présente des difficultés sous le point de vue purement algébrique, c'est aussi le seul sur lequel je crois devoir donner des éclaircissemens : voyez pour les autres cas la trigonométrie de TREMBLEY.

Fin du second volume.

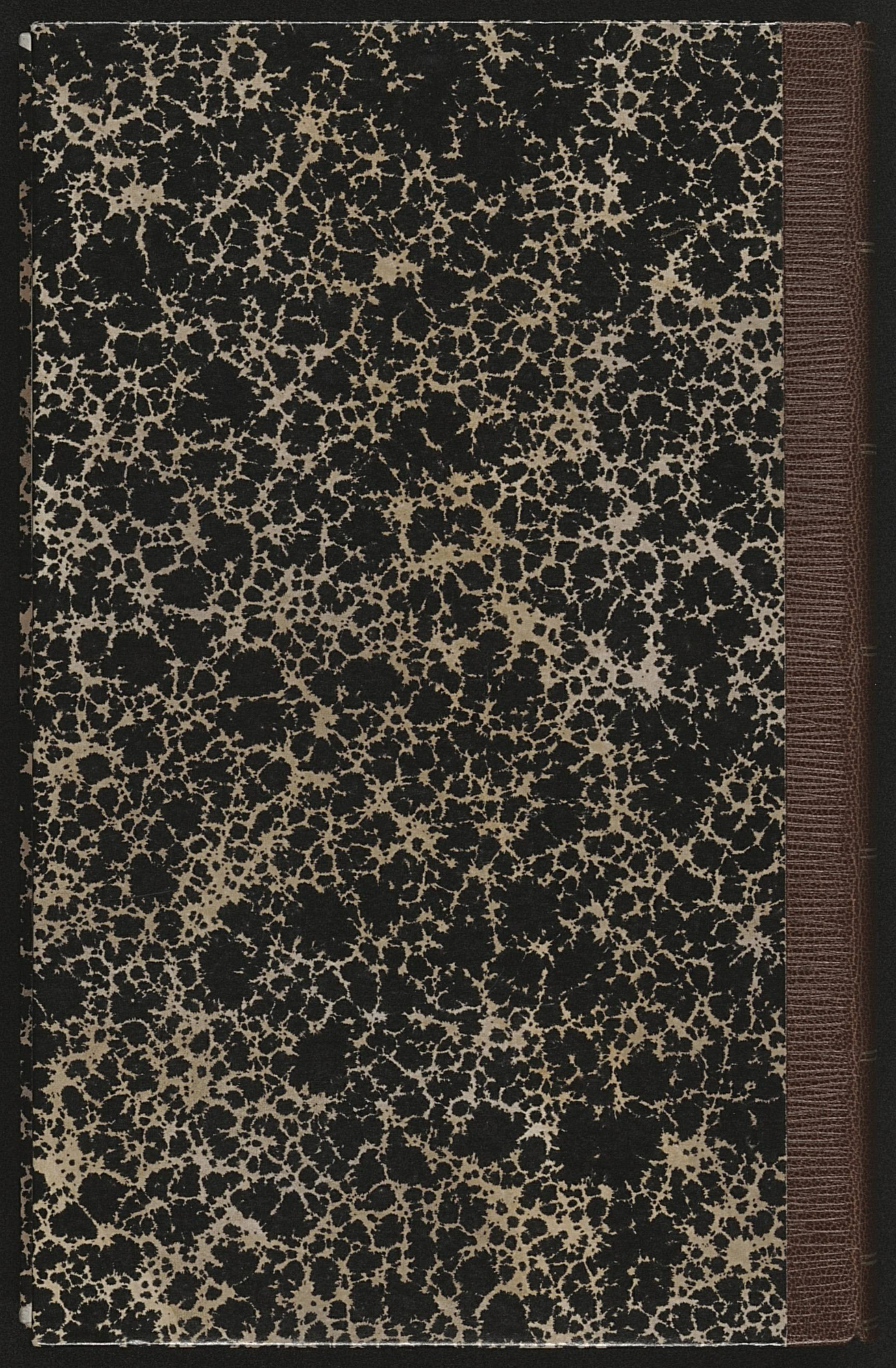
TABLE

DES MATIÈRES CONTENUES

DANS CE VOLUME.



C. G. Geissler. Sculpsit.



inches | centimeters

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11 (A)	12	13	14	15
L*	39.12	65.43	49.87	44.26	55.56	70.82	63.51	39.92	52.24	97.06	92.02	87.34	82.14	72.06	62.15
a*	13.24	18.11	-4.34	-13.80	9.82	-33.43	34.26	11.81	48.55	-0.40	-0.60	-0.75	-1.06	-1.19	-1.07
b*	15.07	18.72	-22.29	22.85	-24.49	-0.35	59.60	-46.07	18.51	1.13	0.23	0.21	0.43	0.28	0.19
Density										0.04	0.09	0.15	0.22	0.36	0.51

	16 (M)	17	18 (B)	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
L*	49.25	38.62	28.86	16.19	8.29	3.44	31.41	72.46	72.95	29.37	54.91	43.96	82.74	52.79	50.87
a*	-0.16	-0.18	0.54	-0.05	-0.81	-0.23	20.98	-24.45	16.83	13.06	-38.91	52.00	3.45	50.88	-27.17
b*	0.01	-0.04	0.60	0.73	0.19	0.49	-19.43	55.93	68.80	-49.49	30.77	30.01	81.29	-12.72	-29.46
Density	0.75	0.98	1.24	1.67	2.04	2.42									

D50 Illuminant, 2 degree observer

Density ⟶

Golden Thread

Colors by Munsell Color Services Lab

Don Williams

LHUILIER

ÉLÉMENS
RAISONNÉS
D'ALGÈBRE

II

1804